

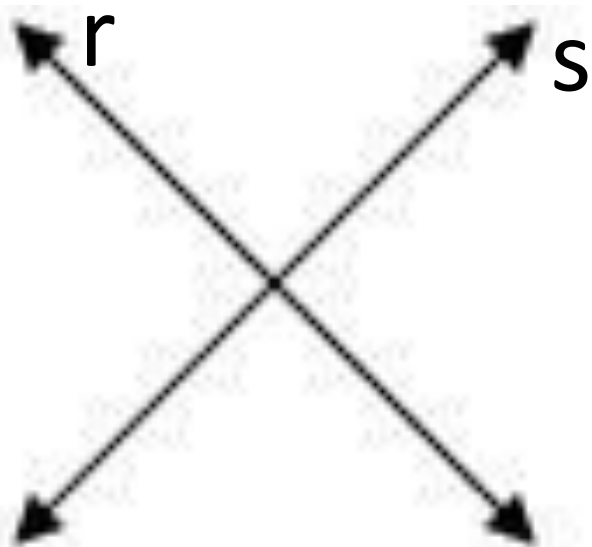
Geometria Plana

Conceitos Primitivos

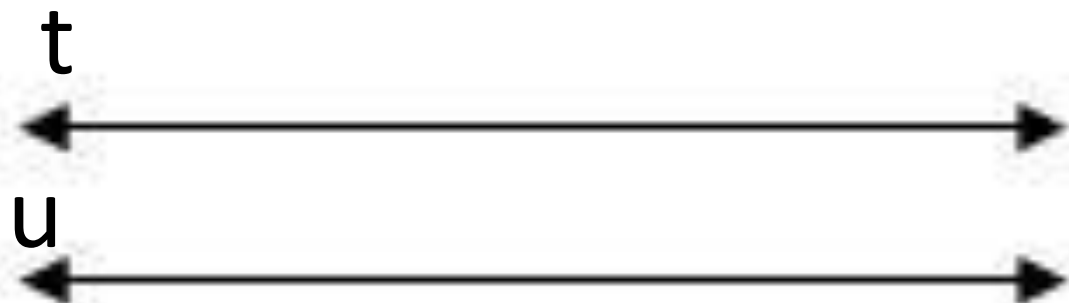
Ponto: é o elemento fundamental da geometria, é adimensional e representado por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, ...).



Reta: é um conjunto infinito de pontos, são representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto (r, s, t, ...).



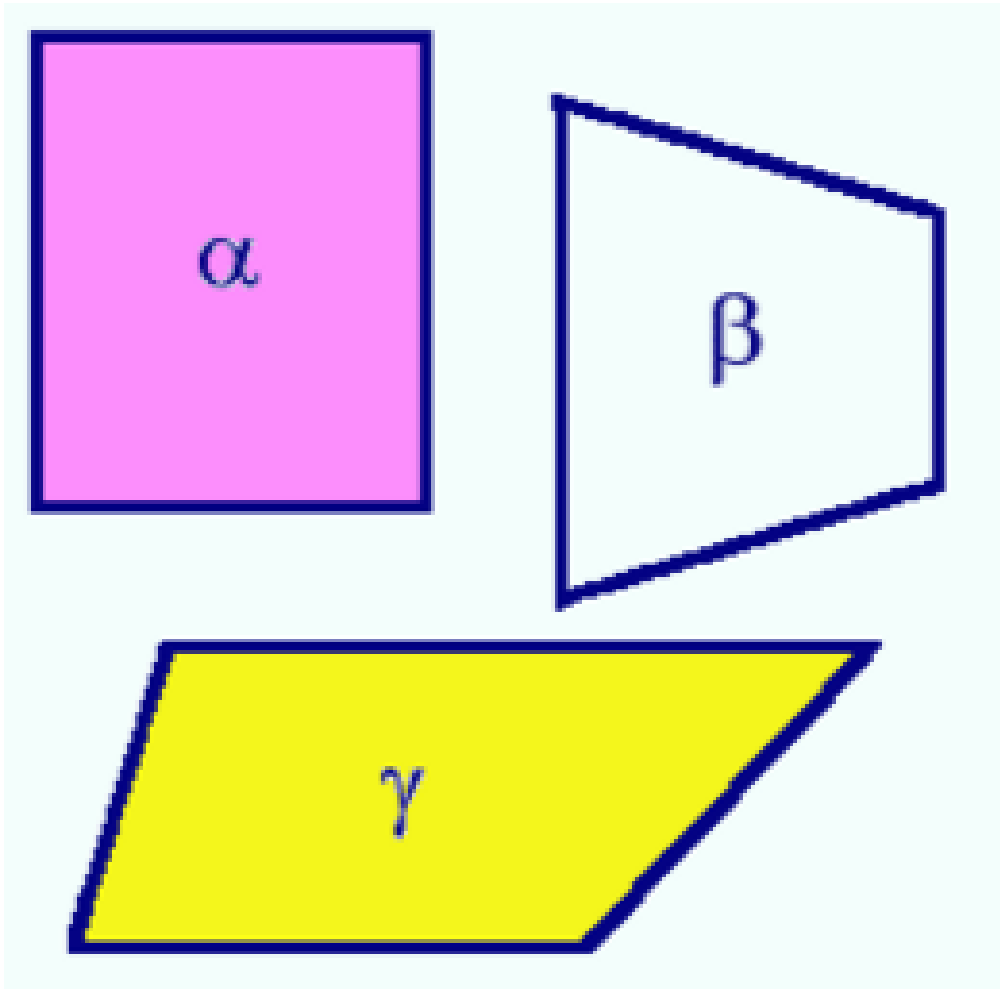
Retas concorrentes



Retas paralelas

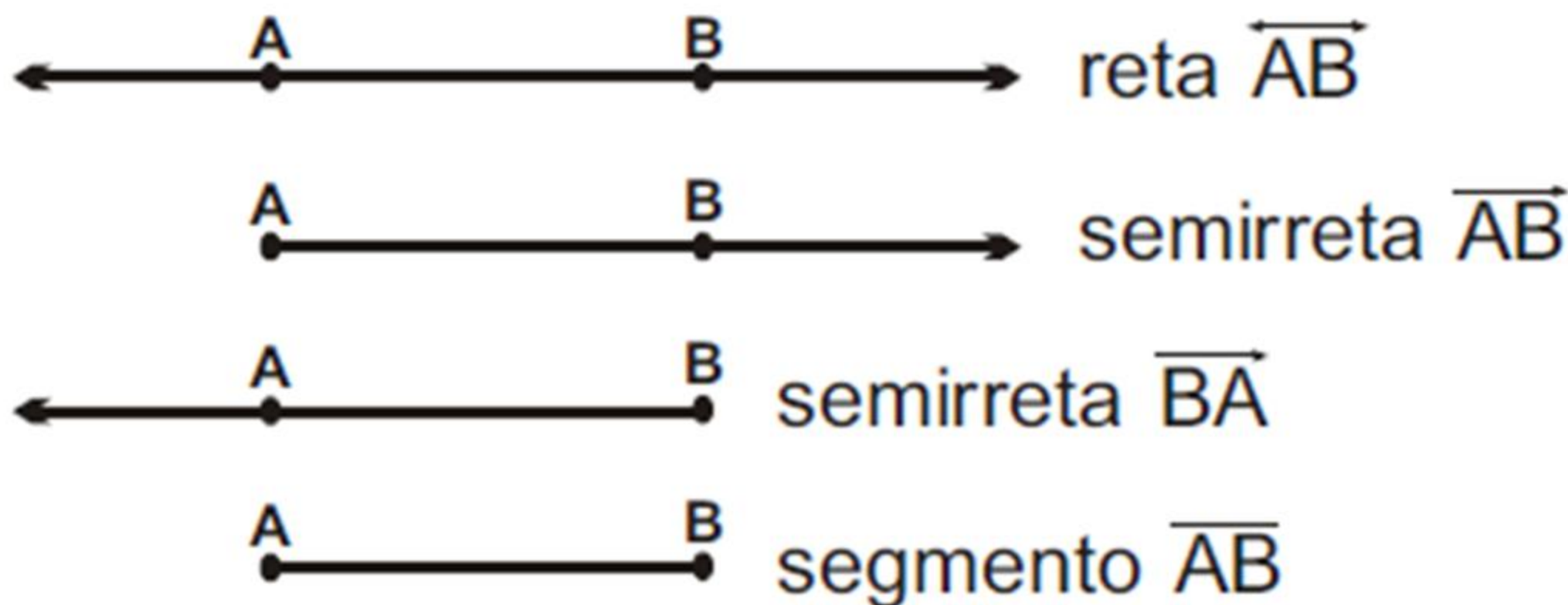
Retas perpendiculares, são retas concorrentes que no cruzamento formam um ângulo igual a 90° .

Plano: é um conjunto infinito de pontos, ou de retas, são representados por letras minúsculas do alfabeto grego (α , β , γ , ...).



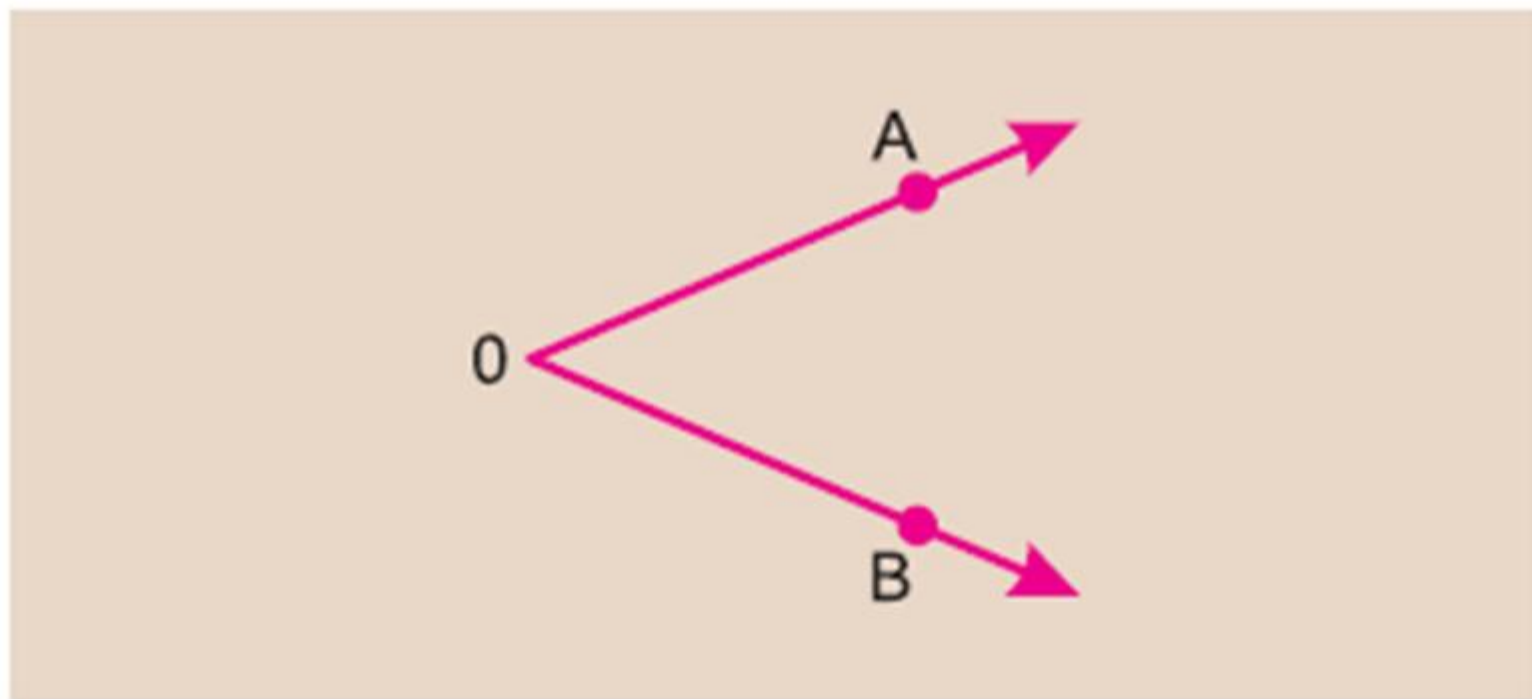
Os planos podem ser prolongados infinitamente para todos os lados.

Reta, semirreta e segmento de reta.



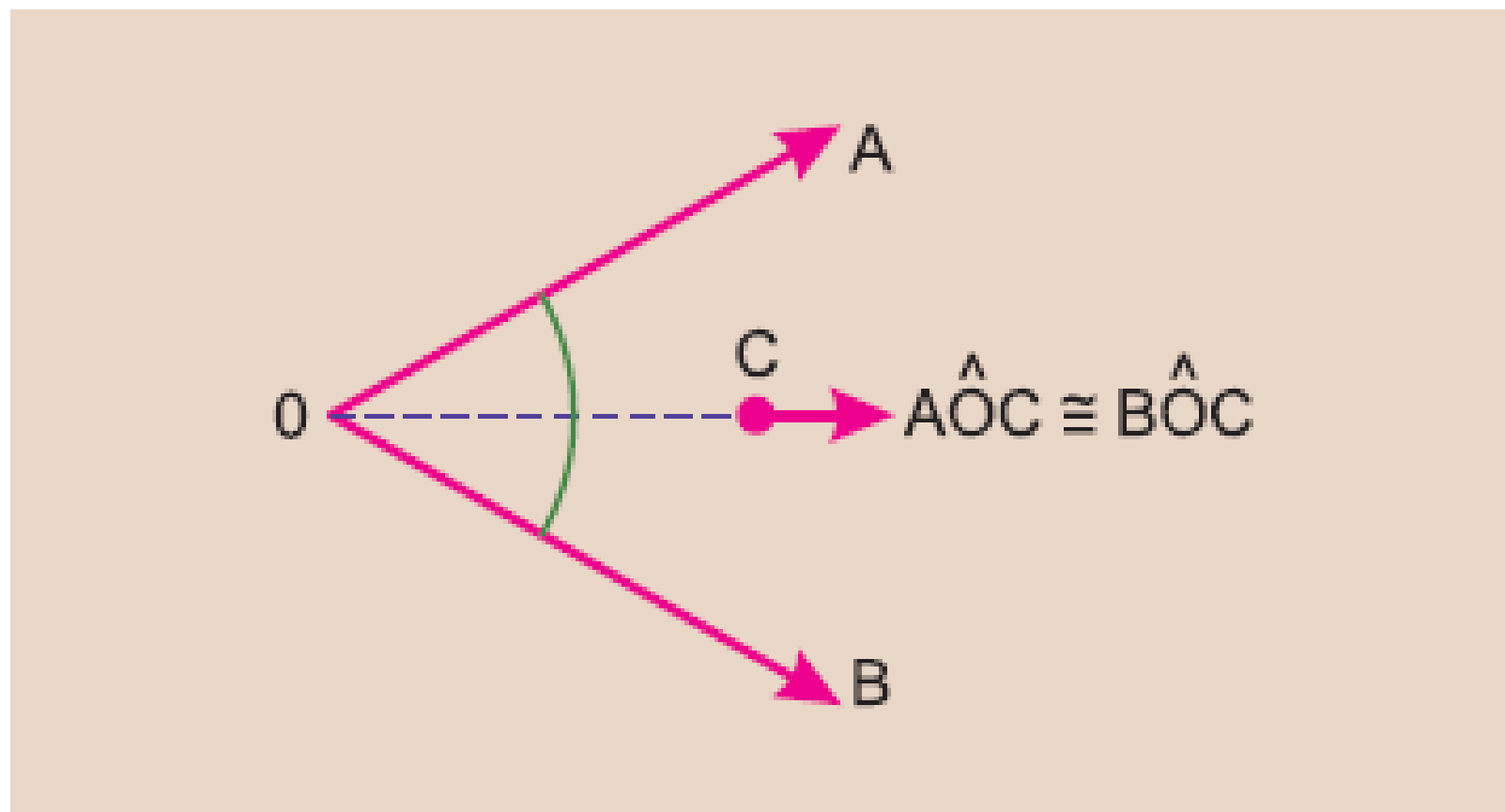
ÂNGULOS

Ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem.



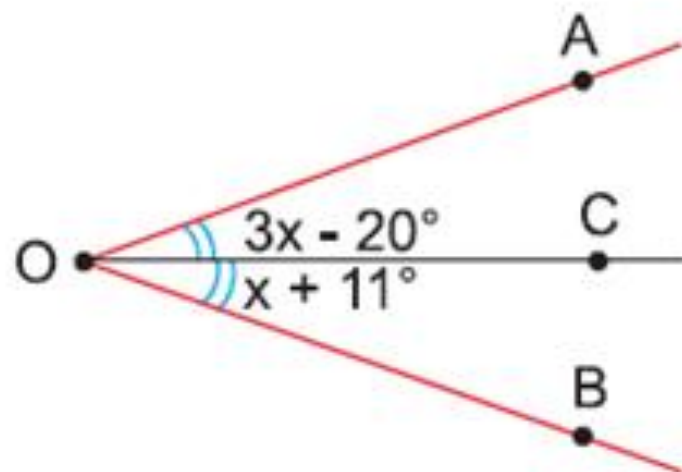
□ Bissetriz

É uma semirreta de origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes.



Exemplo:

Calcular x na figura, sabendo-se que $\vec{OC}$ é bissetriz do ângulo $\hat{AOB}$.



A bissetriz, é uma semirreta que divide o ângulo ao meio, dessa forma

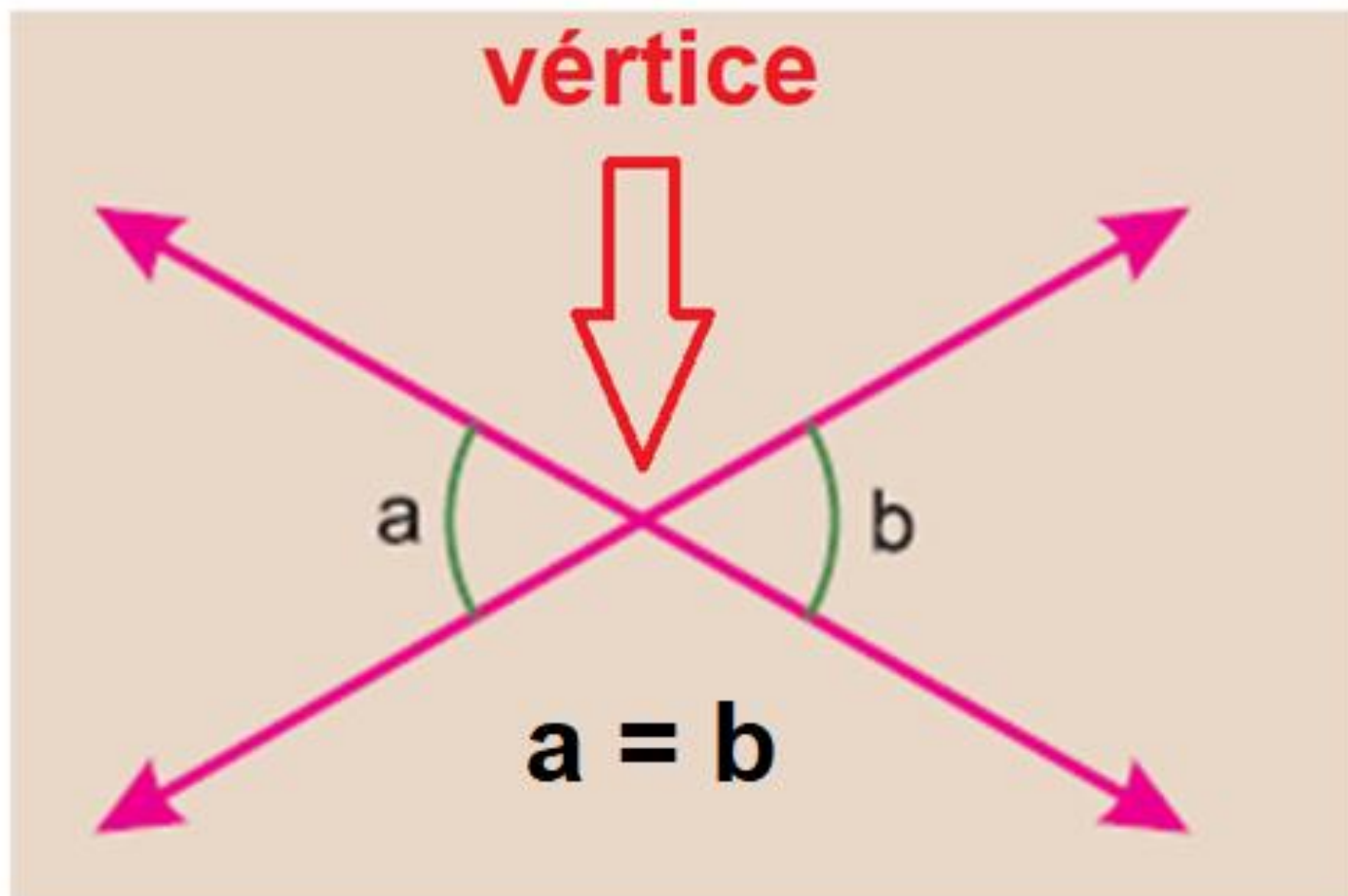
$$3x - 20^\circ = x + 11^\circ$$

$$2x = 31^\circ$$

$$x = 15,5^\circ, \text{ ou seja,}$$

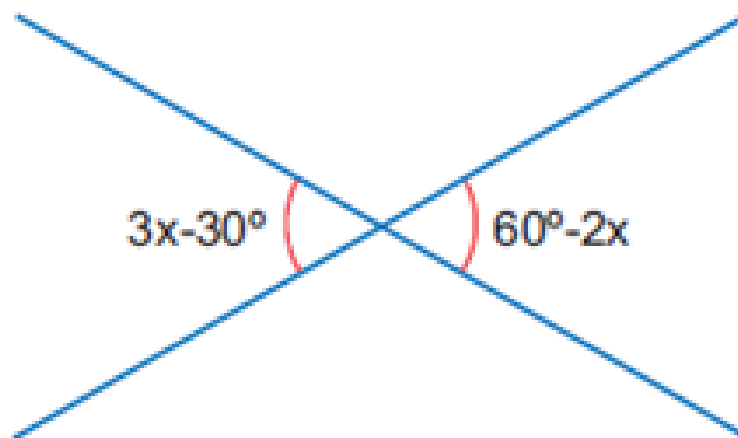
$$x = 15^\circ 30'$$

Ângulos opostos pelo vértice (opv): são congruentes



Exemplo:

Utilizando esse teorema, você descobrirá que o valor de x na figura seguinte é:

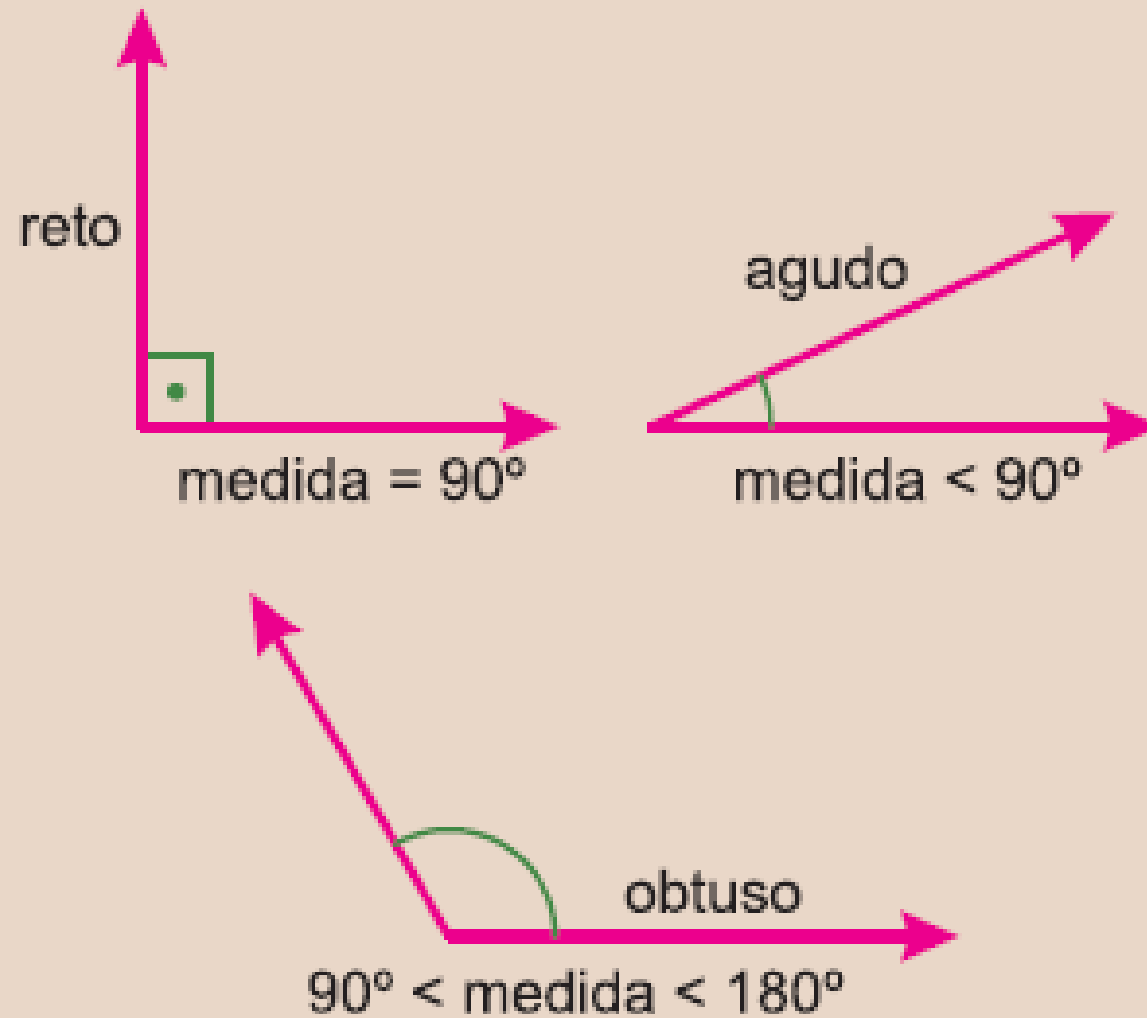


RESOLUÇÃO:

$$3x - 30^\circ = 60^\circ - 2x \Rightarrow 5x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

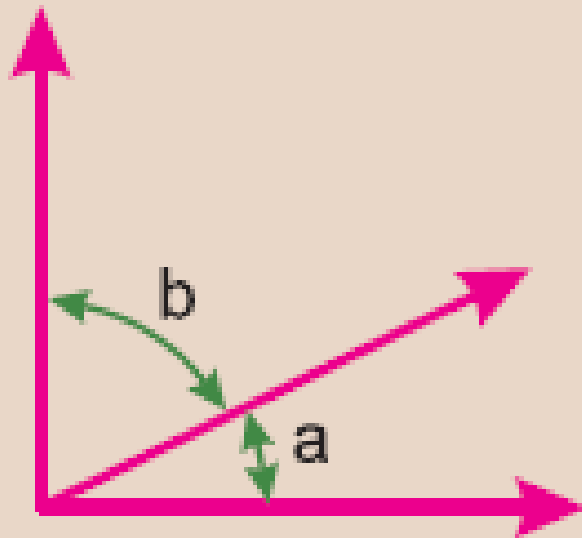
**Ângulos opostos
pelo vértice
(opv) são
congruentes
“iguais”.**

□ Ângulos: reto, agudo e obtuso

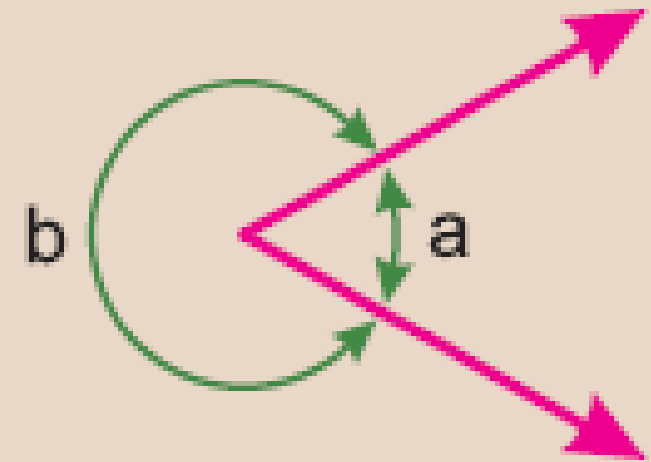


☐ Ângulos complementares, suplementares e replementares

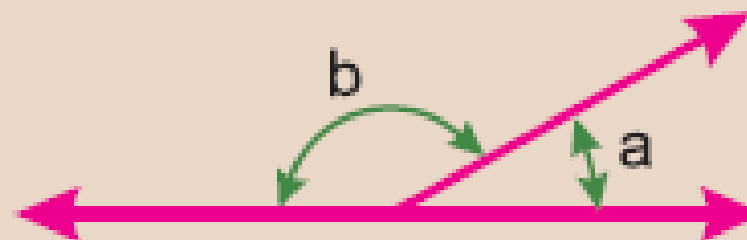
- complementares: Se $\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$



- replementares: Se $\hat{a} + \hat{b} = 360^\circ$



- suplementares: Se $\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$



Exemplos:

1) Qual o complemento de 50° ?

40° , pois é o que falta para 90° , ou seja, $90 - 50$.

2) Qual o suplemento de 50° ?

130° , pois é o que falta para 180° , ou seja, $180 - 50$.

3) Qual o replemento de 50° ?

310° , pois é o que falta para 360° , ou seja, $360 - 50$.

Exercícios - ângulos

1. As medidas do complemento, do suplemento e do replemento de um ângulo de 40° são,

RESOLUÇÃO:

complemento: $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

suplemento: $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

replemento: $360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$

2. O complemento de um ângulo de $69^{\circ}42'51''$ mede:

a) $21^{\circ}58'49''$

b) $20^{\circ}58'49''$

c) $20^{\circ}18'09''$

d) $20^{\circ}17'09''$

e) $21^{\circ}17'09''$

3 Calcule o complemento de $69^{\circ} 51' 22''$.

RESOLUÇÃO:

I) $90^{\circ} = 89^{\circ} 59' 60''$

II) $89^{\circ} 59' 60''$

$- 69^{\circ} 51' 22''$

$20^{\circ} 08' 38''$

4 A medida de um ângulo é igual à metade da medida do seu suplemento. O complemento desse ângulo mede:

- a) 60° b) 90° c) 120° d) 30° e) 45°

RESOLUÇÃO:

$$\text{I) } x = \frac{180^\circ - x}{2}$$

$$2x = 180^\circ - x$$

$$3x = 180^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

Resposta: D

**II) Logo, o complemento
é $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$**

5 (PUC-MG) – O dobro do complemento de um ângulo é igual à quinta parte do suplemento desse ângulo. A medida do ângulo é igual a:

- a) 80° b) 60° c) 40° d) 30° e) 20°

RESOLUÇÃO:

$$2(90^\circ - x) = \frac{180^\circ - x}{5} \Leftrightarrow 900^\circ - 10x = 180^\circ - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 720^\circ \Leftrightarrow x = 80^\circ$$

Resposta: A

6. (UFES) – O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento deste ângulo. Este ângulo mede:

a) 45°

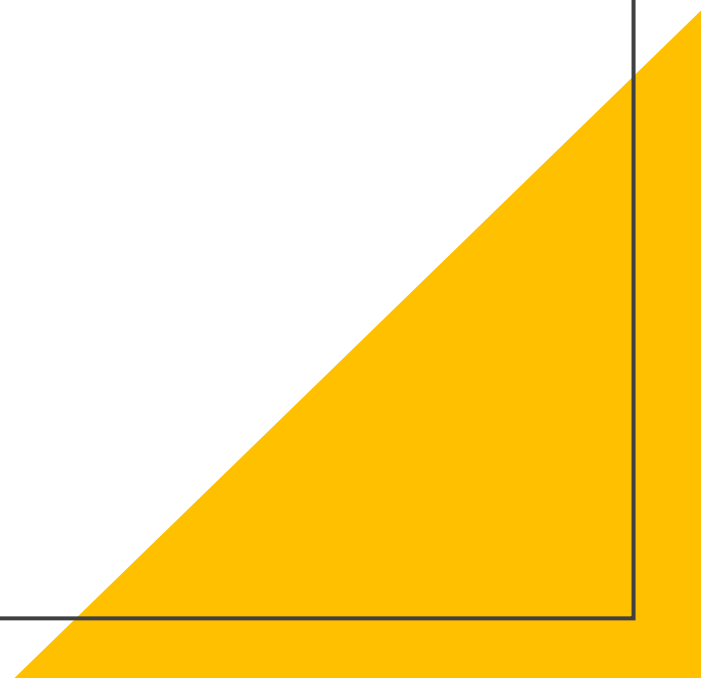
b) $48^\circ 30'$

c) $56^\circ 15'$

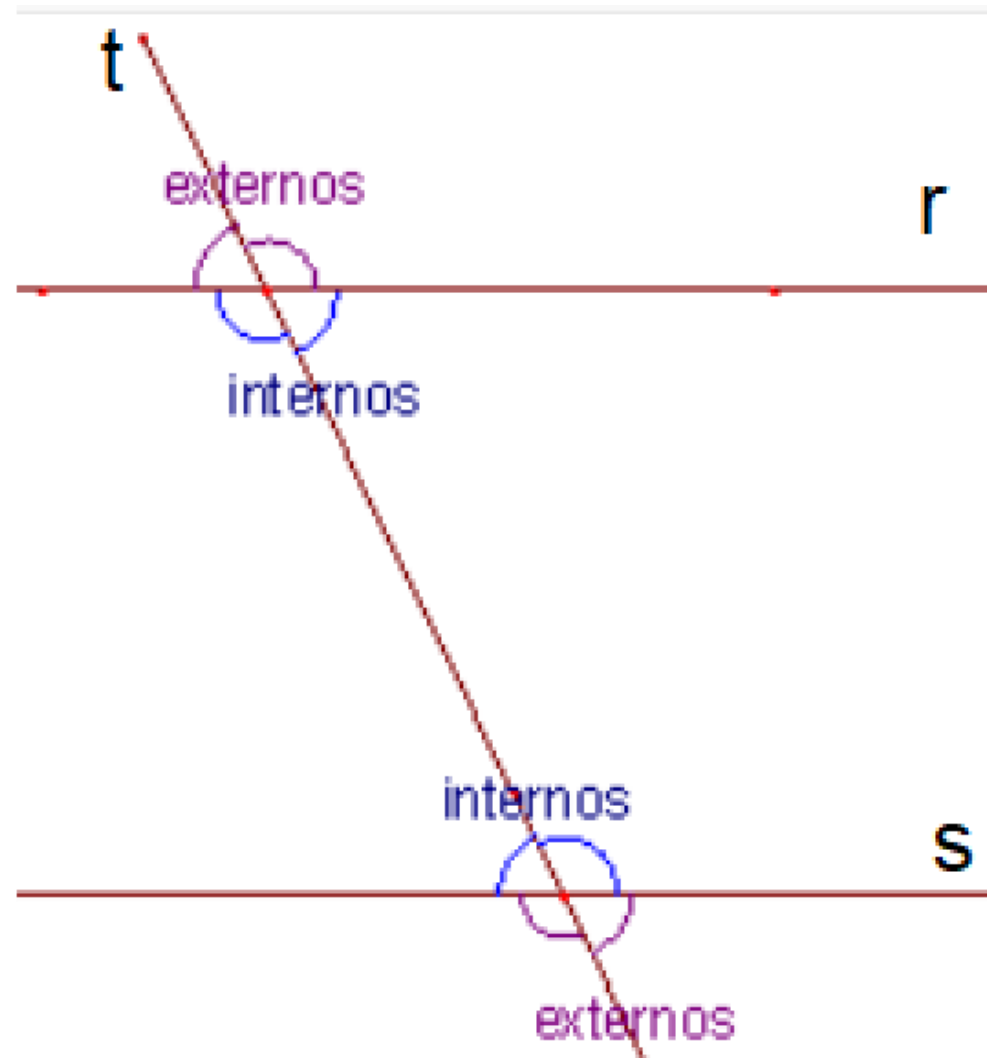
d) 60°

e) $78^\circ 45'$

Paralelismo

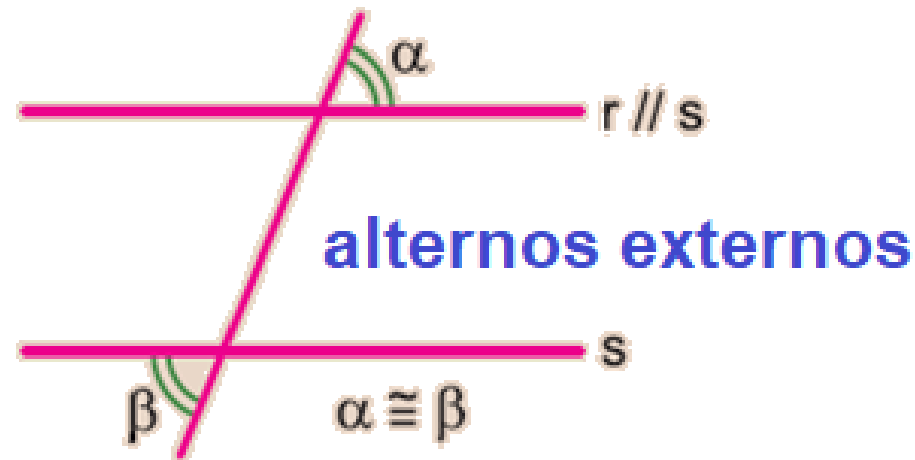
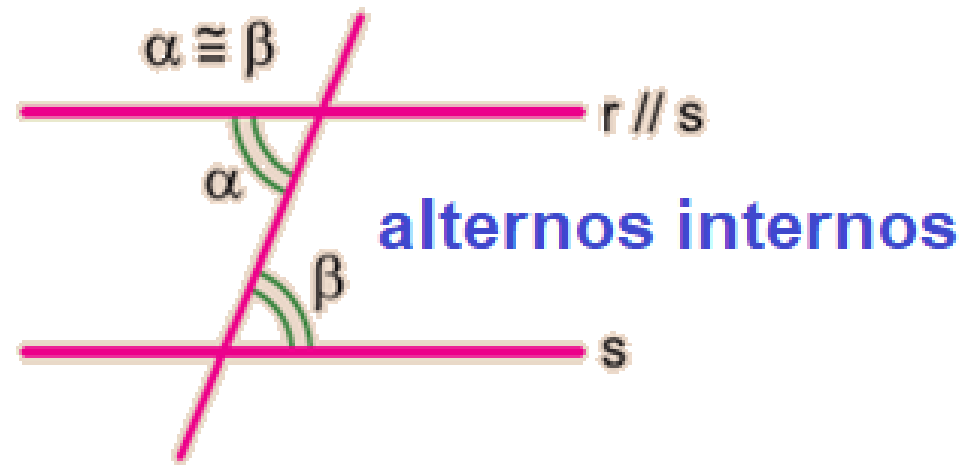


Duas retas paralelas r e s , interceptadas por uma reta transversal t , formam ângulos externos e internos.



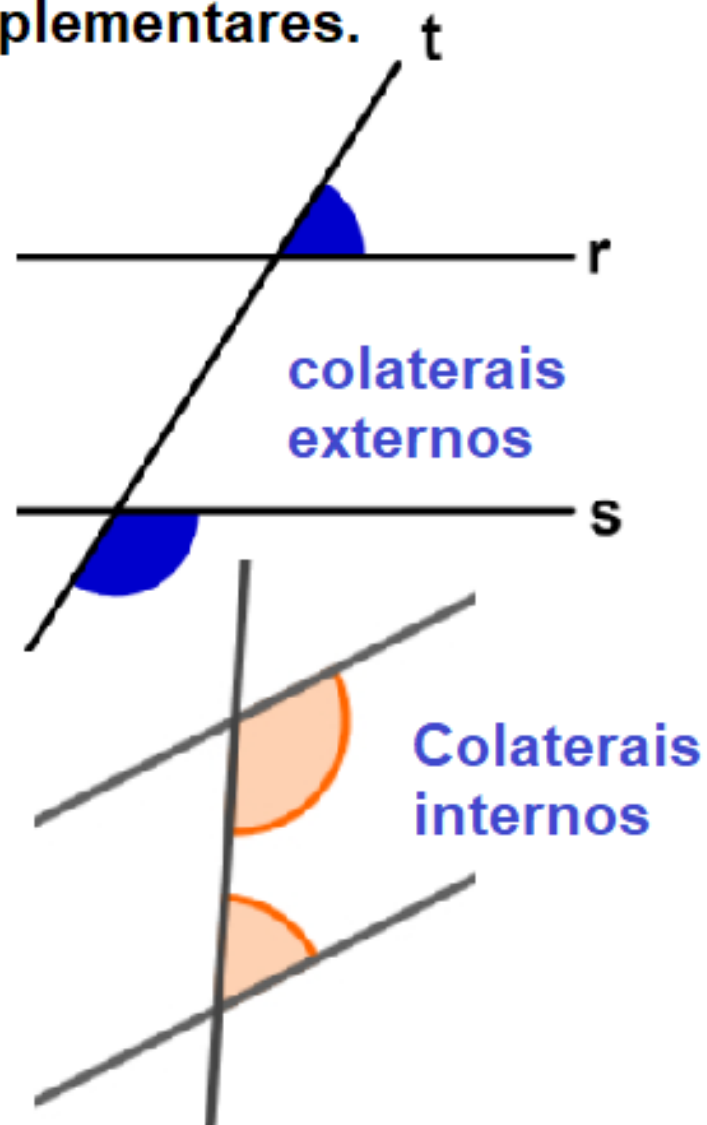
- **Ângulos alternos**

Um de cada lado
da reta transversal,
são congruentes.



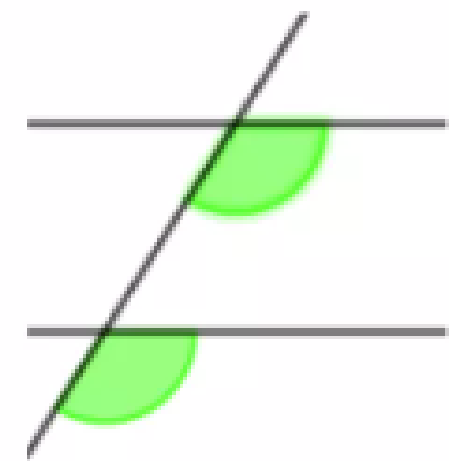
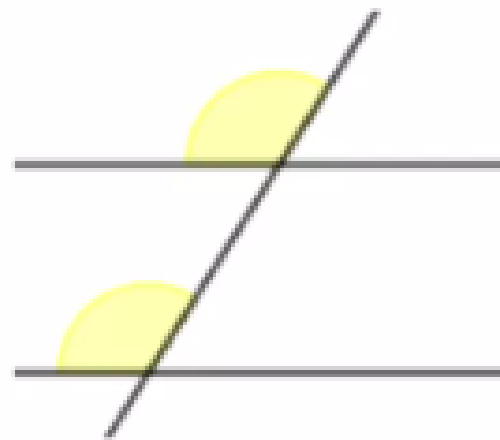
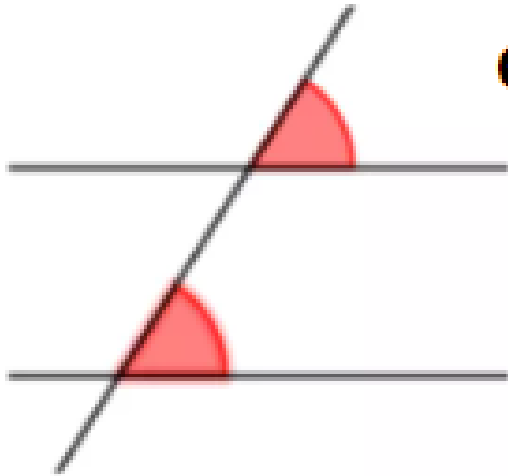
Ângulos colaterais

Do mesmo lado da
reta transversal, são
suplementares.



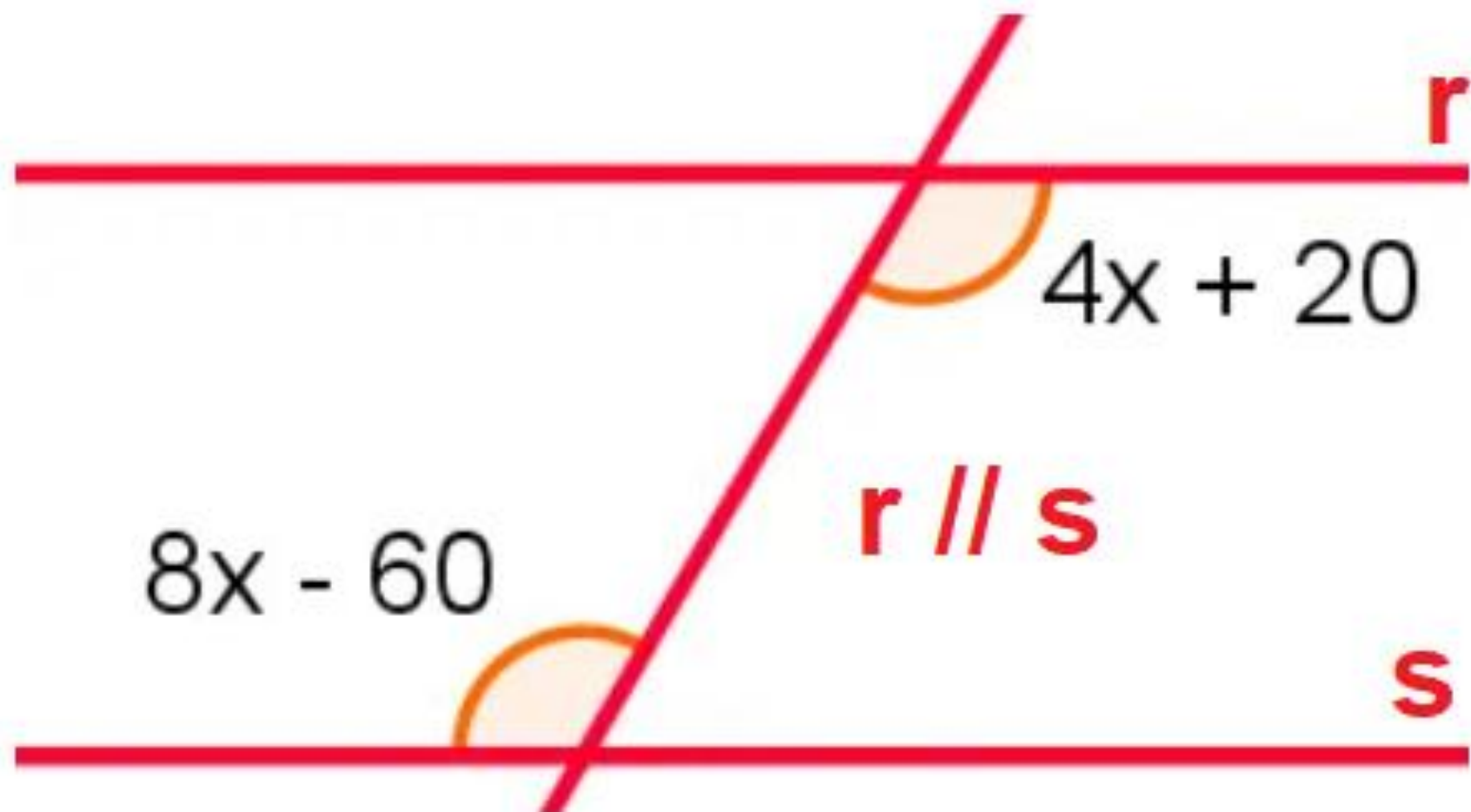
Ângulos correspondentes

Do mesmo lado da reta transversal, sendo um interno e outro externo, são congruentes.

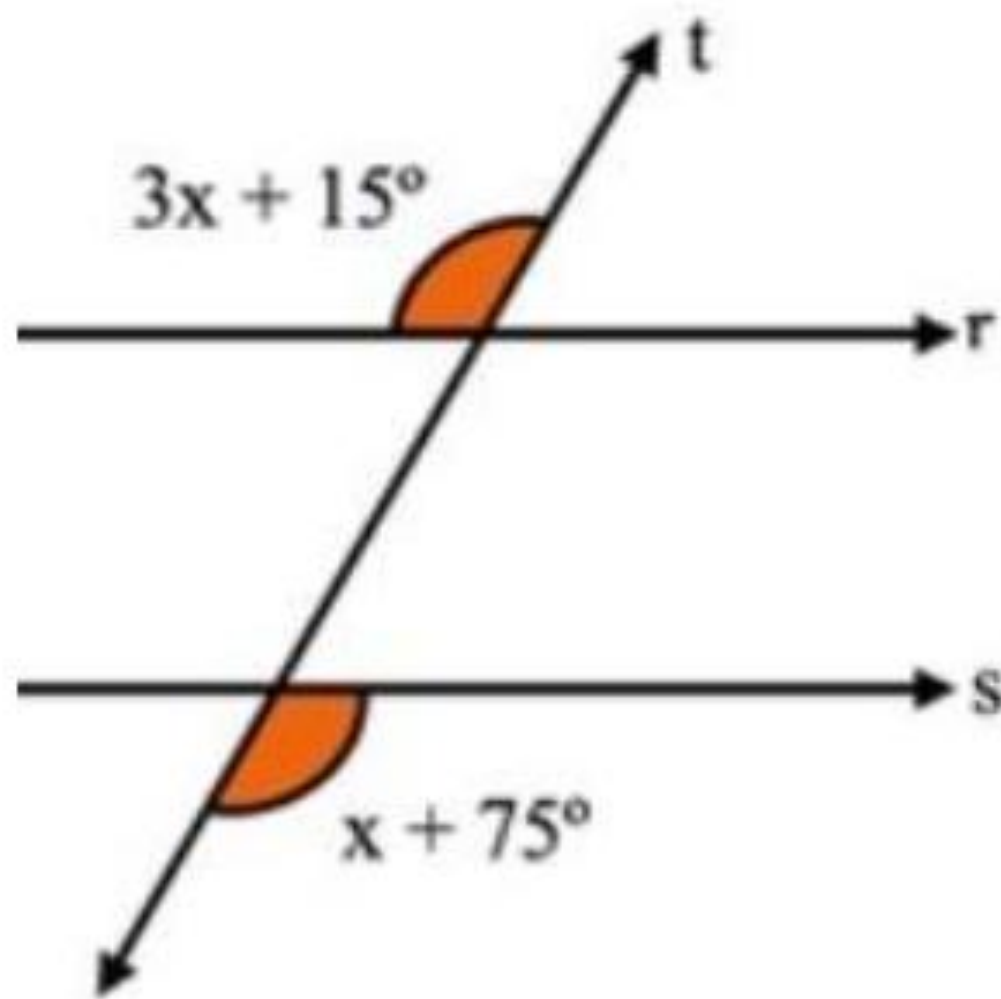


Exemplos

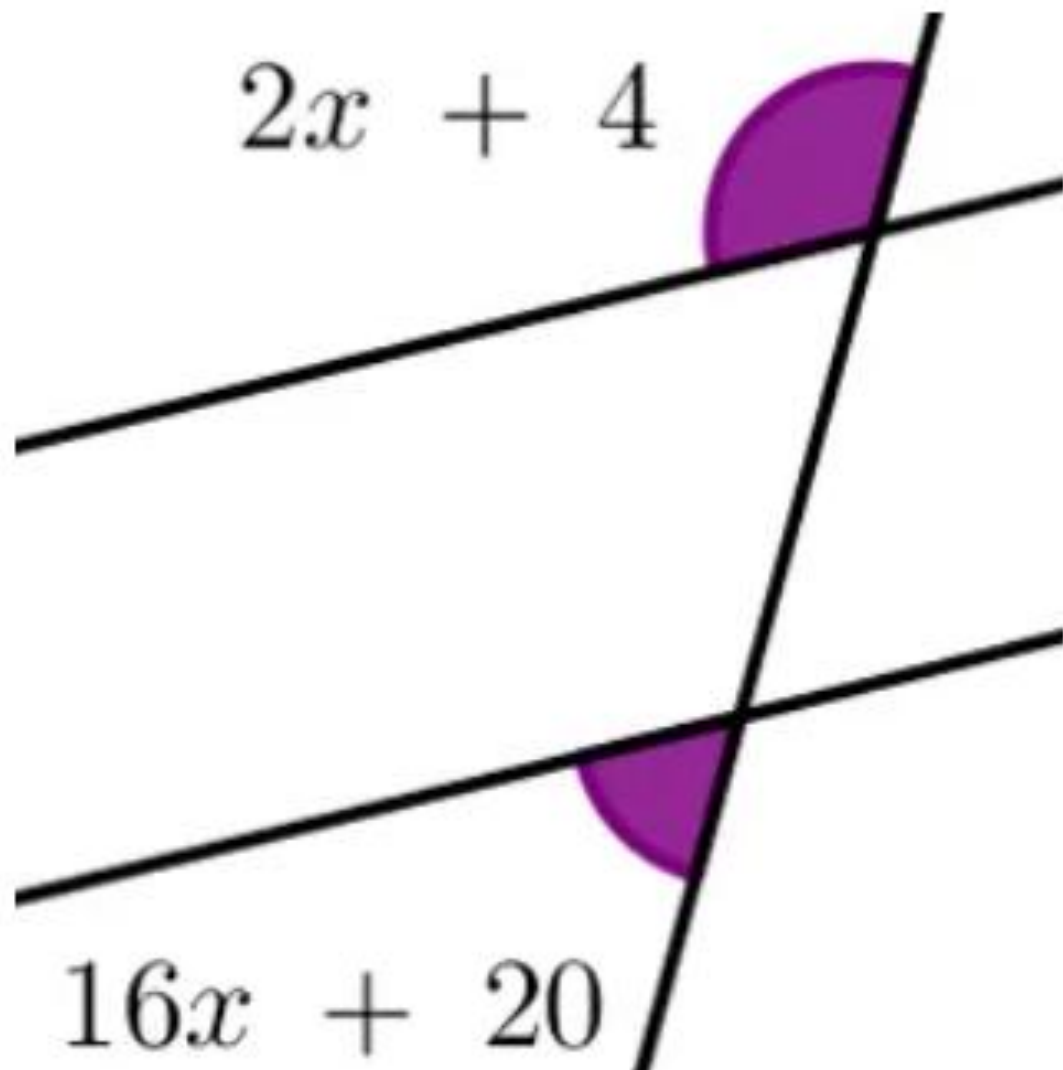
1. Calcule o valor de x .



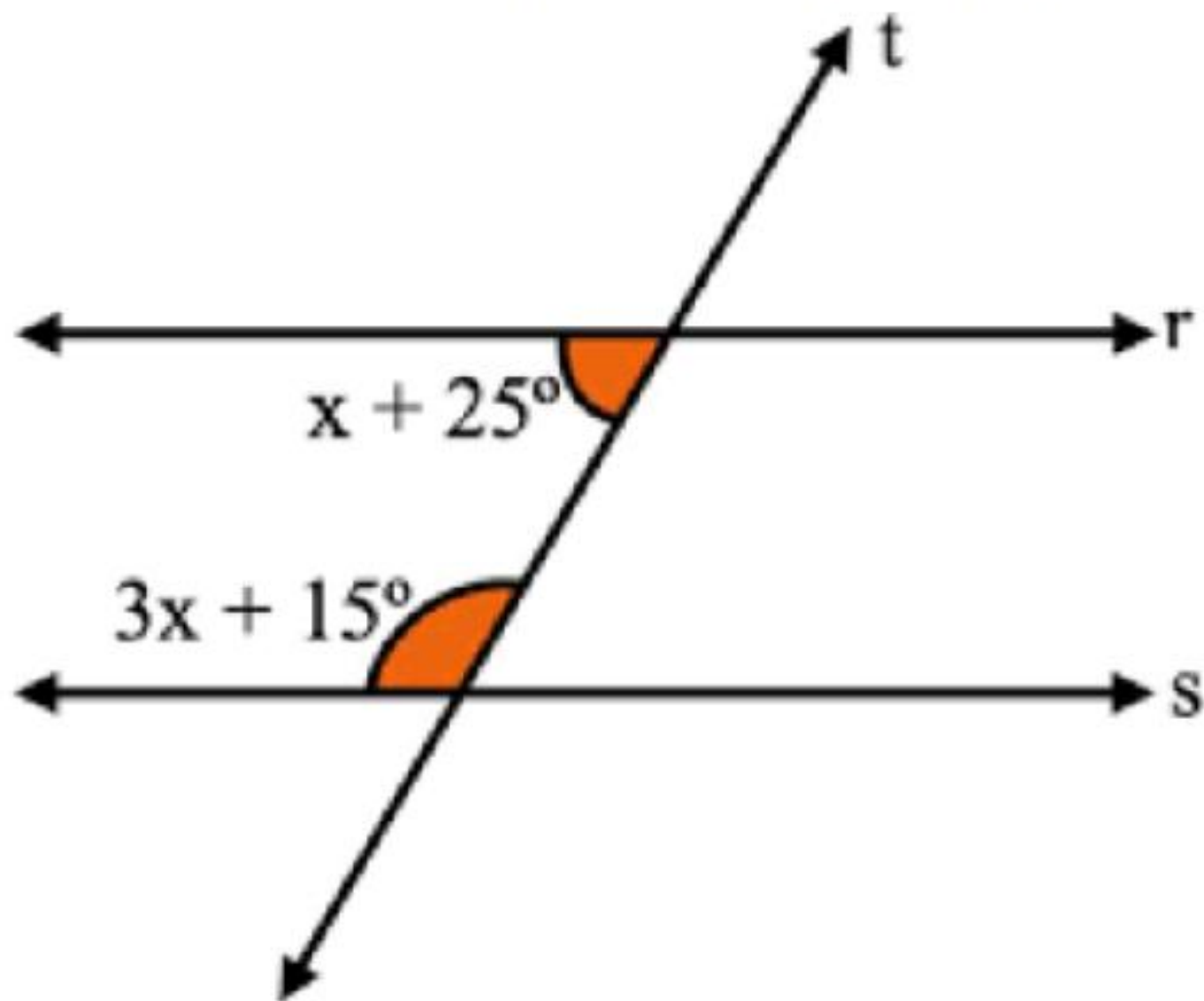
2. Calcule o valor de x .



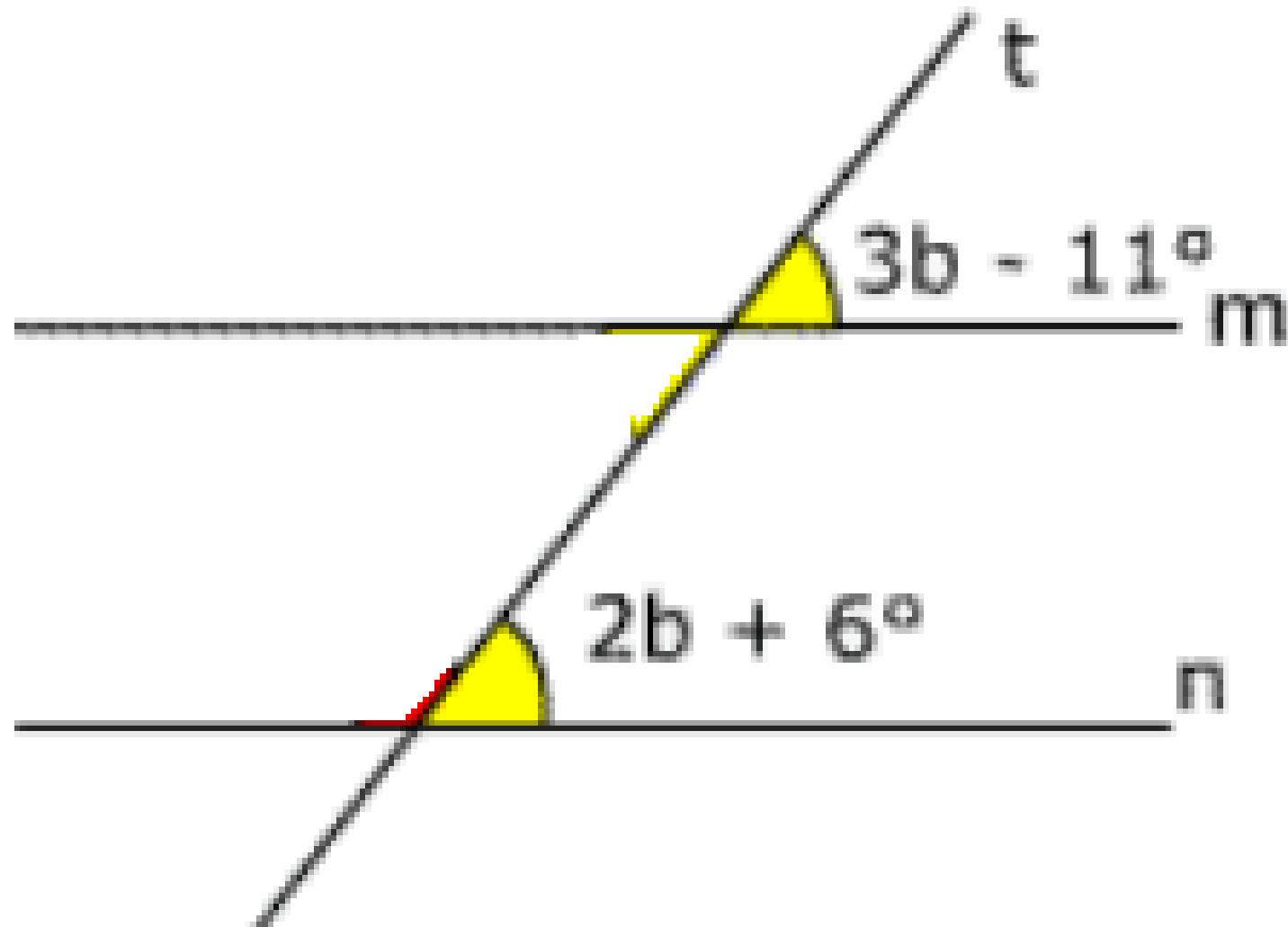
3. Calcule o valor de x .



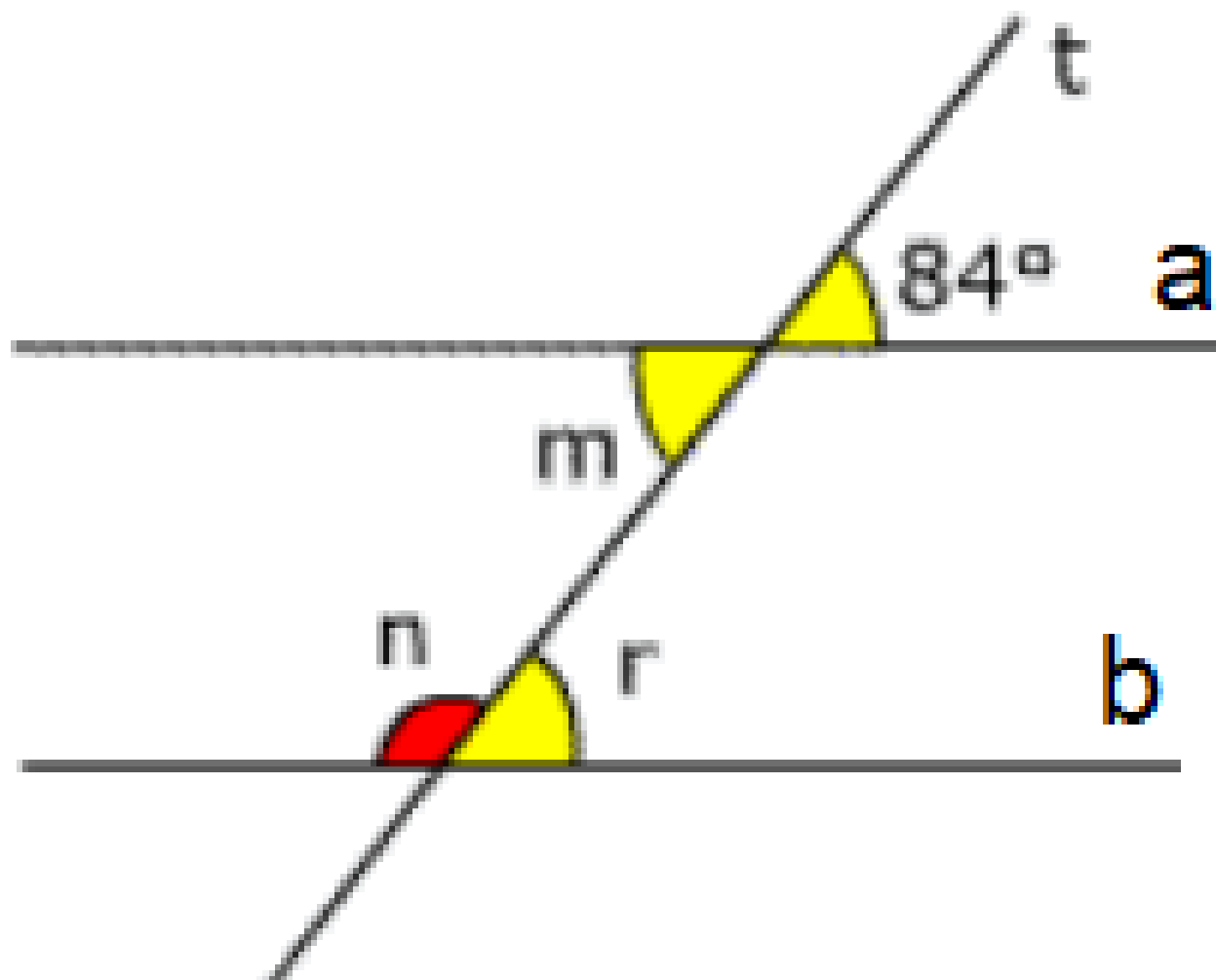
4. Calcule o valor de x .



5. Sendo $m \parallel n$, calcule b .



6. Sendo $a \parallel b$, calcule m , n e r .

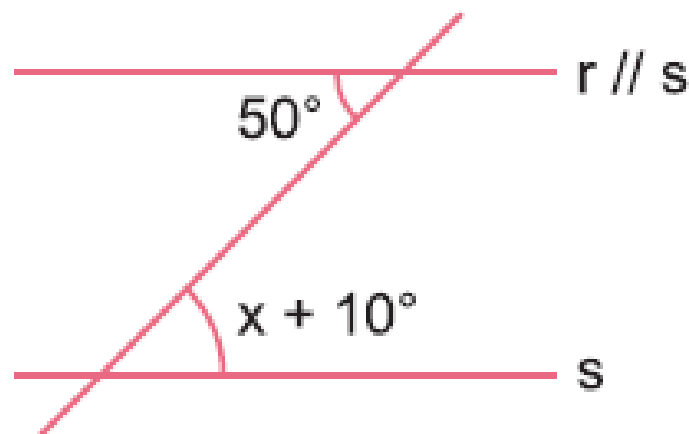


7

Nos exercícios, determinar o valor de x , associando-o com:

- a) 20° b) 25° c) 40° d) 50° e) 80°

A)



RESOLUÇÃO:

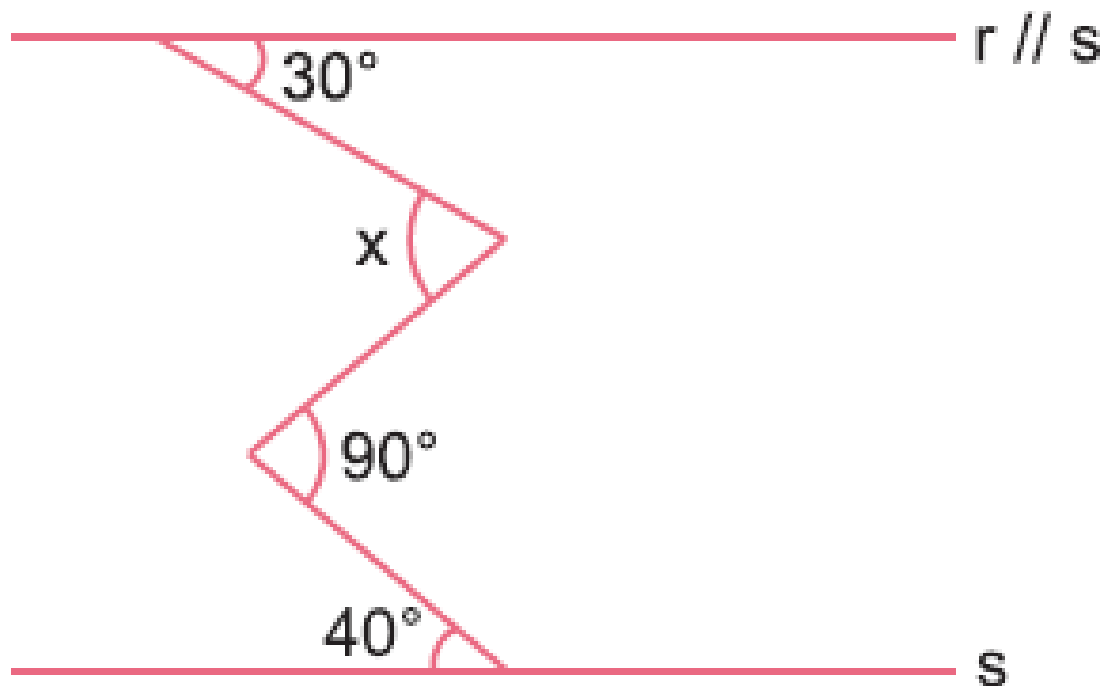
$$x + 10^\circ = 50^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

Resposta: C

**Ângulos
alternos são
congruentes
“iguais”.**

B)



RESOLUÇÃO:

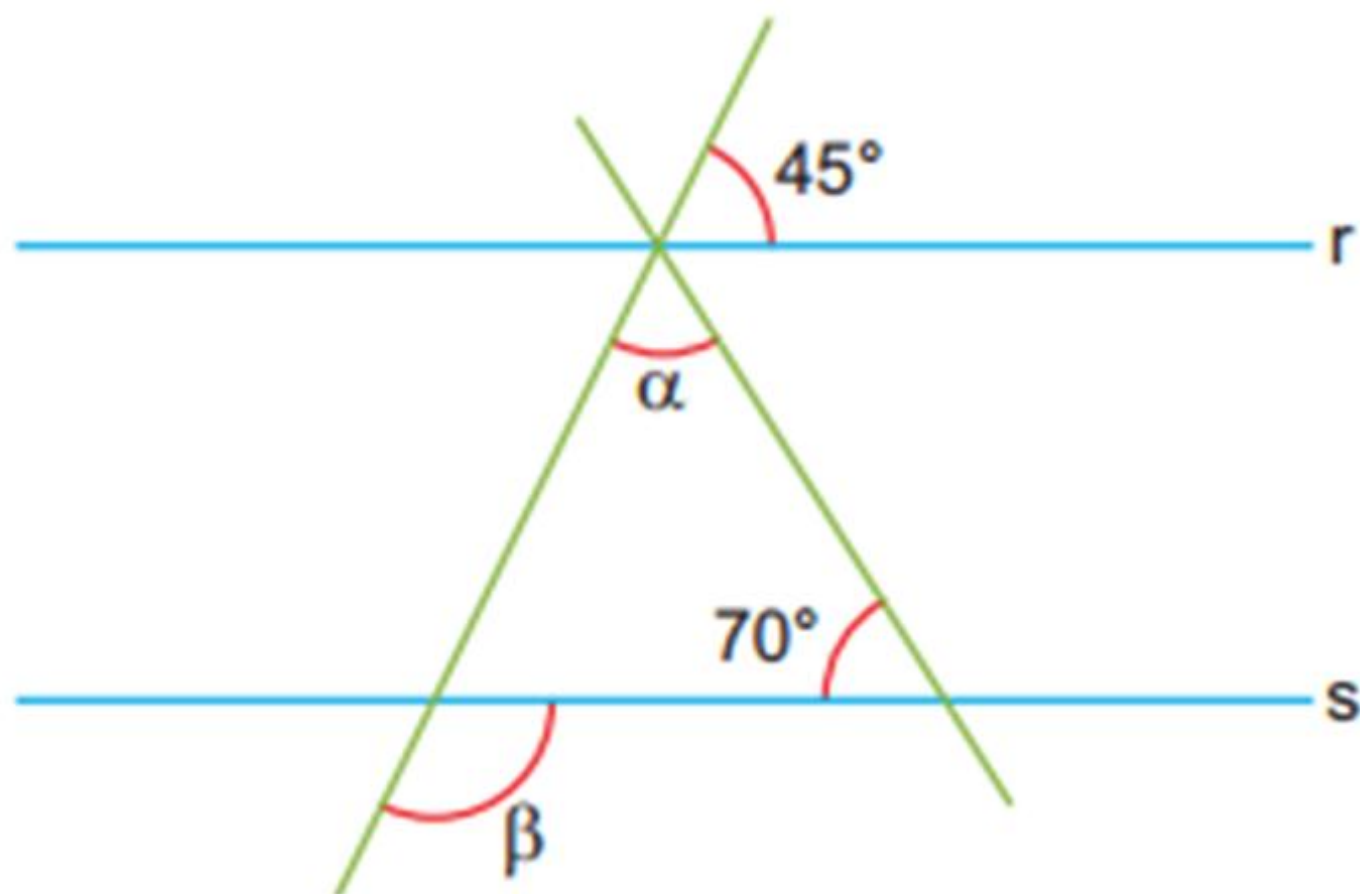
$$x = 30^\circ + 50^\circ$$

$$x = 80^\circ$$

Resposta: E

Dica: trace retas paralelas a r e s, passando pelos vértices de x e de 90° e pense que ângulos alternos são congruentes “iguais”.

8. (UFPE) – Na figura abaixo, as retas **r** e **s** são paralelas.



As medidas dos ângulos α e β são, respectivamente:

a) 65° e 115°

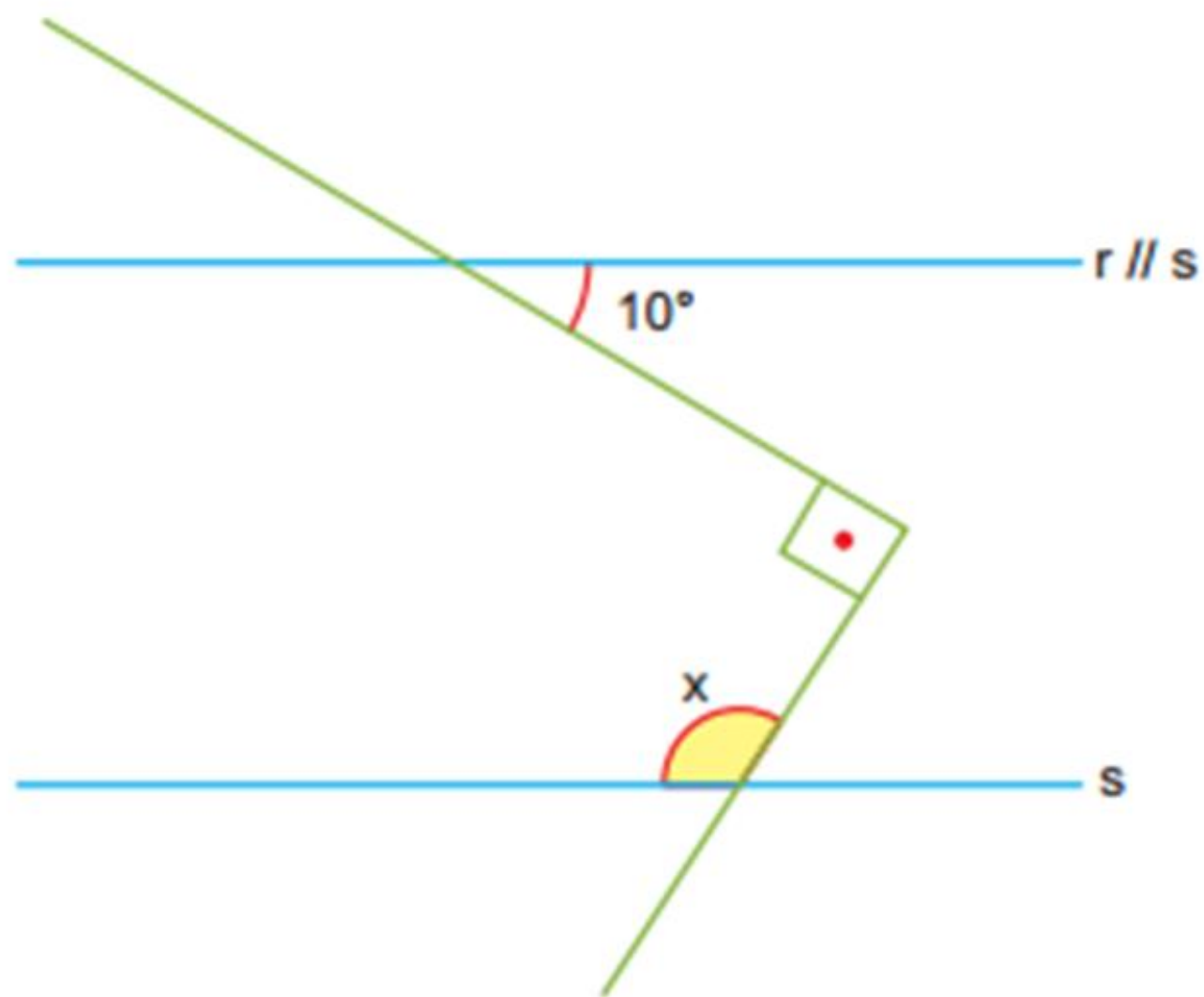
b) 70° e 110°

c) 65° e 135°

d) 60° e 135°

e) 45° e 145°

9. (PUC) – Na figura, $r \parallel s$, então x vale:



a) 90°

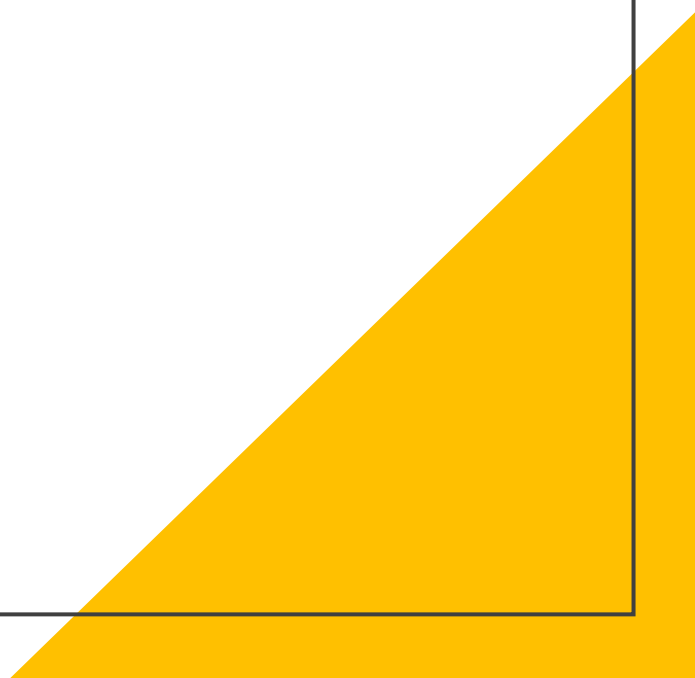
b) 100°

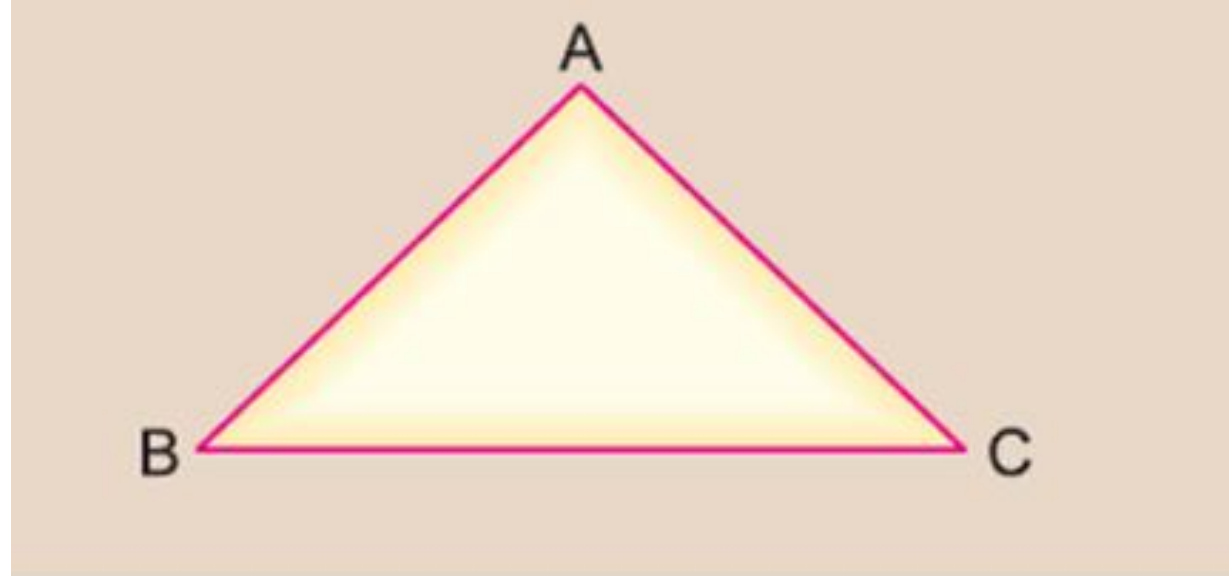
c) 110°

d) 120°

e) 130°

Triângulos





Elementos do triângulo:

- **vértices:** A, B, C

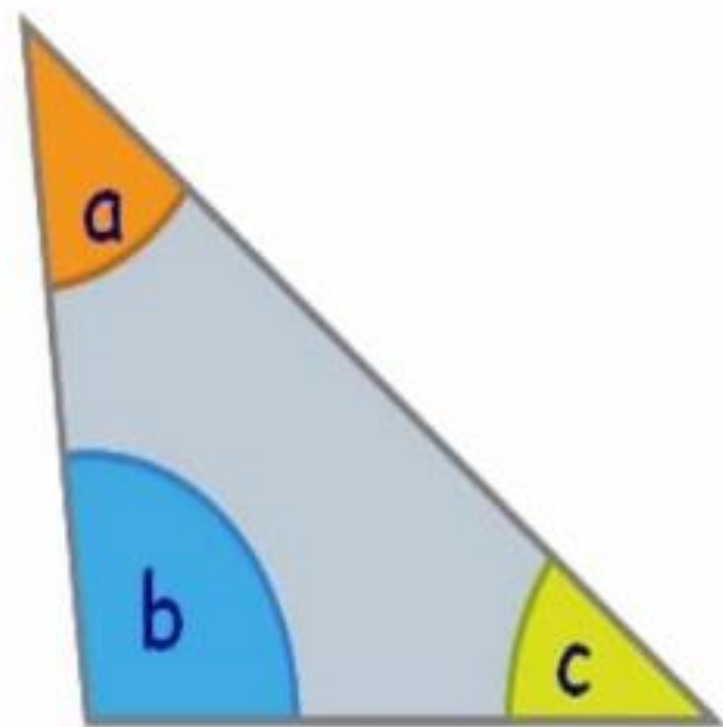
- **lados:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$

- **ângulos internos:**

$$\hat{A} = \hat{BAC}, \hat{B} = \hat{ABC} \text{ e } \hat{C} = \hat{ACB}$$

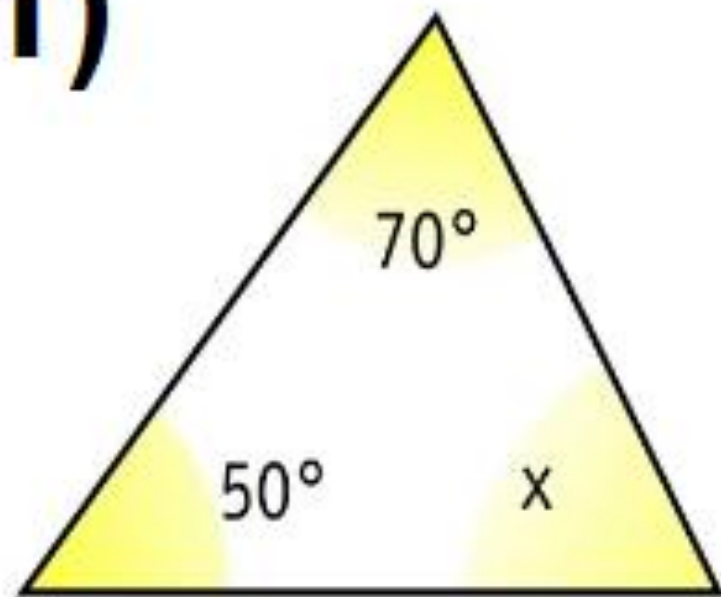
- **Lei angular de Tales:** a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ,

$$\text{Soma de } a + b + c = 180^\circ$$

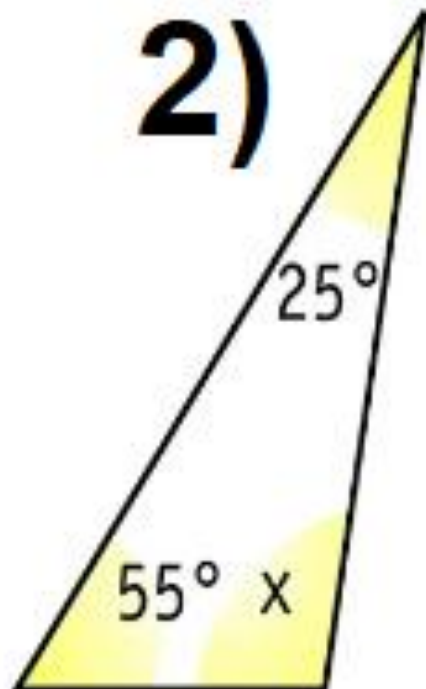


Exemplos: calcule o valor de x .

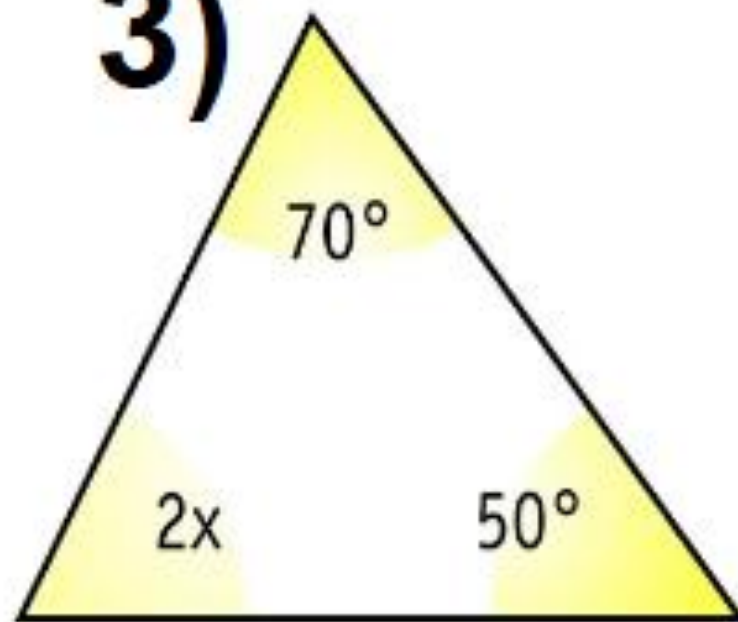
1)

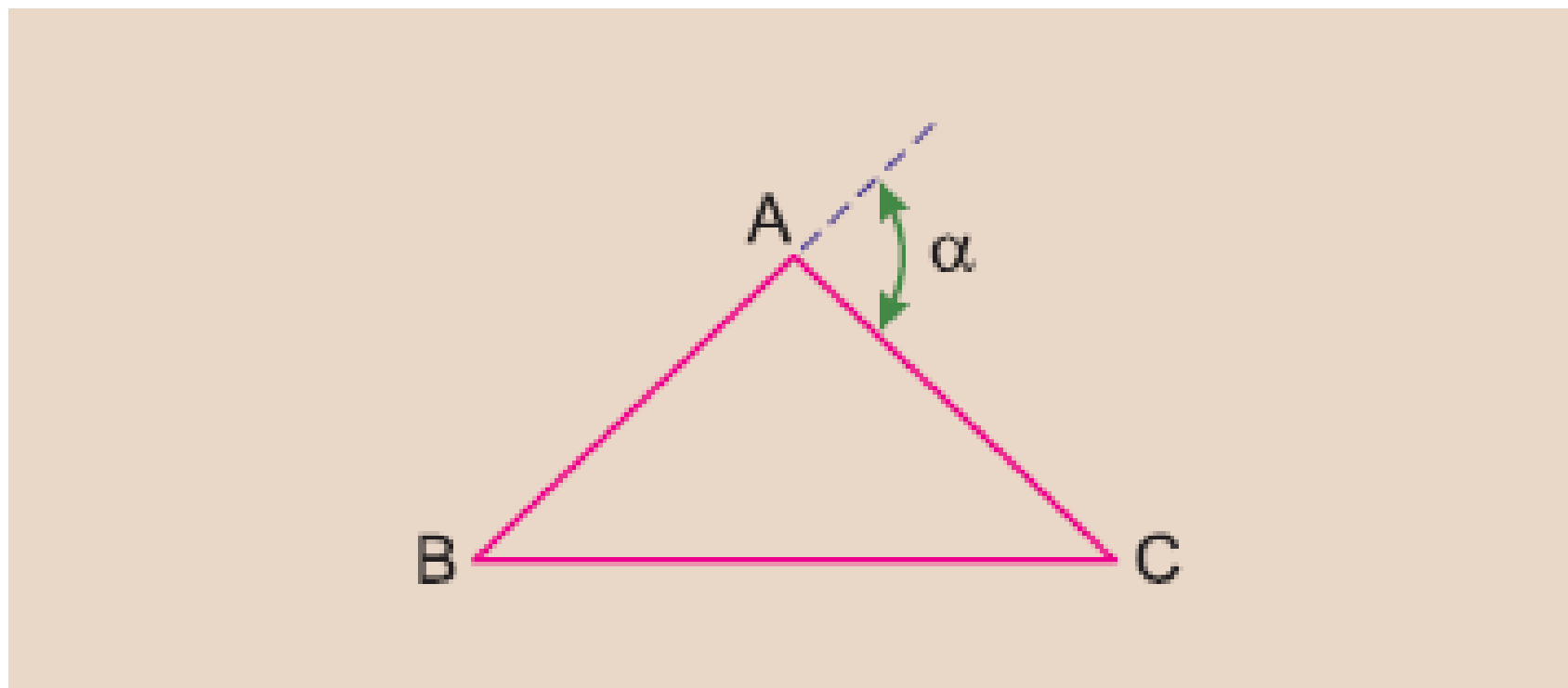


2)



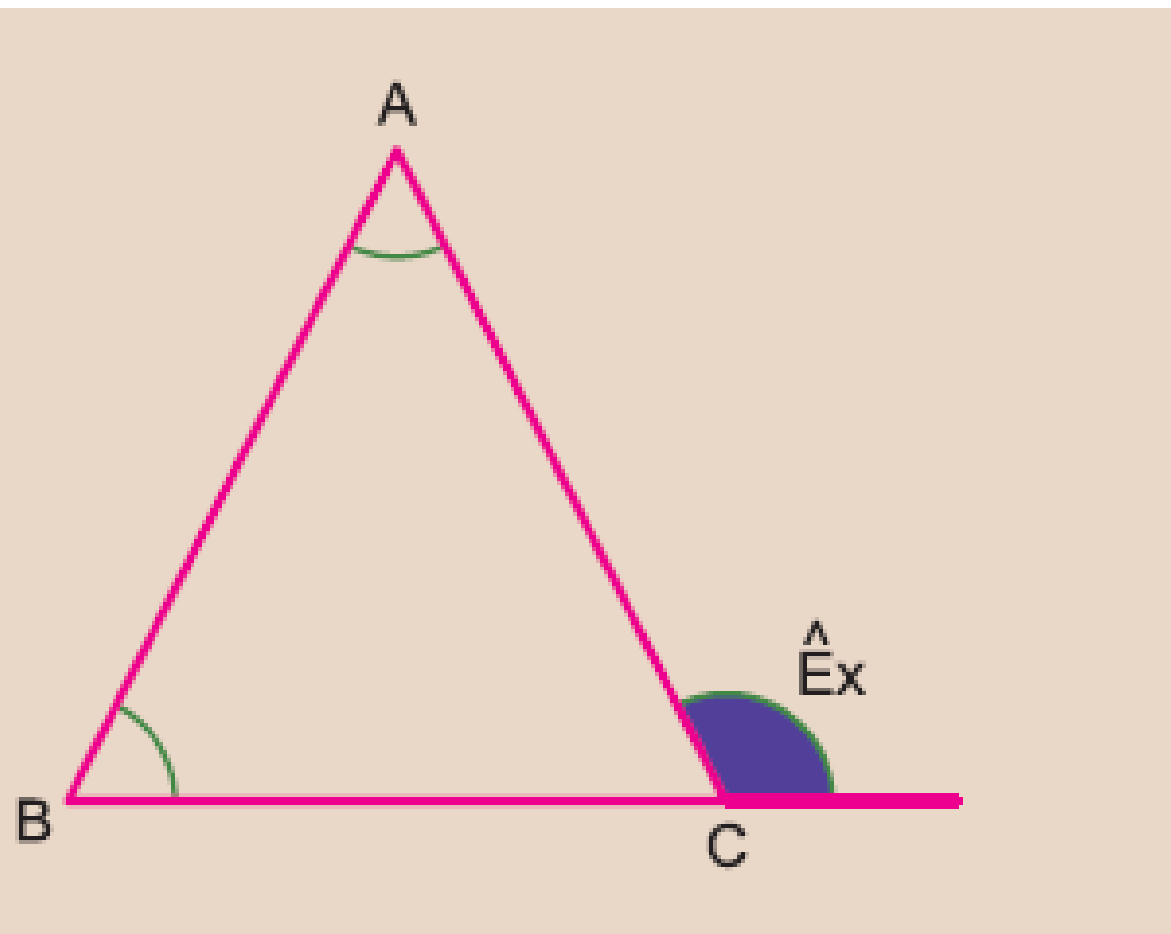
3)





- ângulo externo: é o ângulo formado por um lado e a reta suporte do outro, suplementar ao ângulo interno. Na figura, por exemplo, é o ângulo α .

- **Teorema do ângulo externo:** em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes.



$$\hat{E}x + \hat{C} = 180^\circ$$

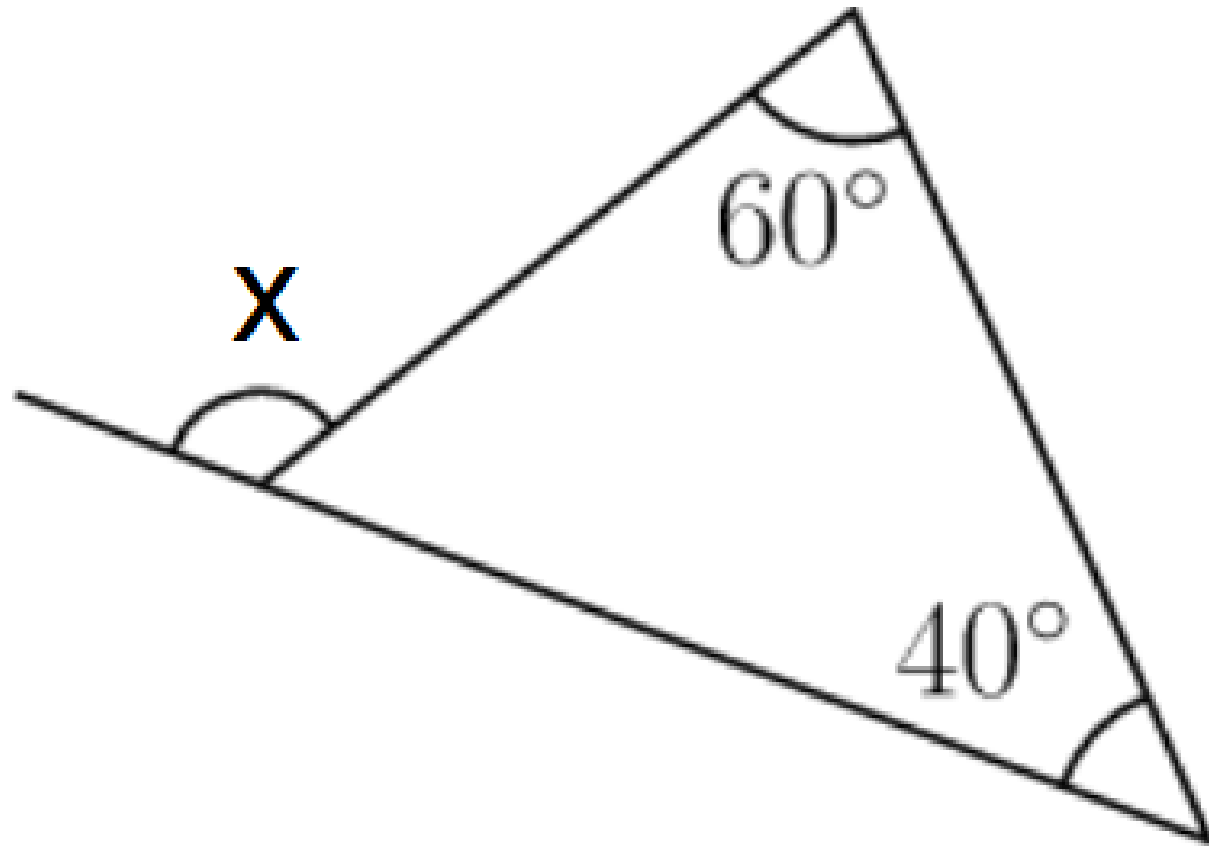
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\text{Assim: } \hat{E}x + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow$$

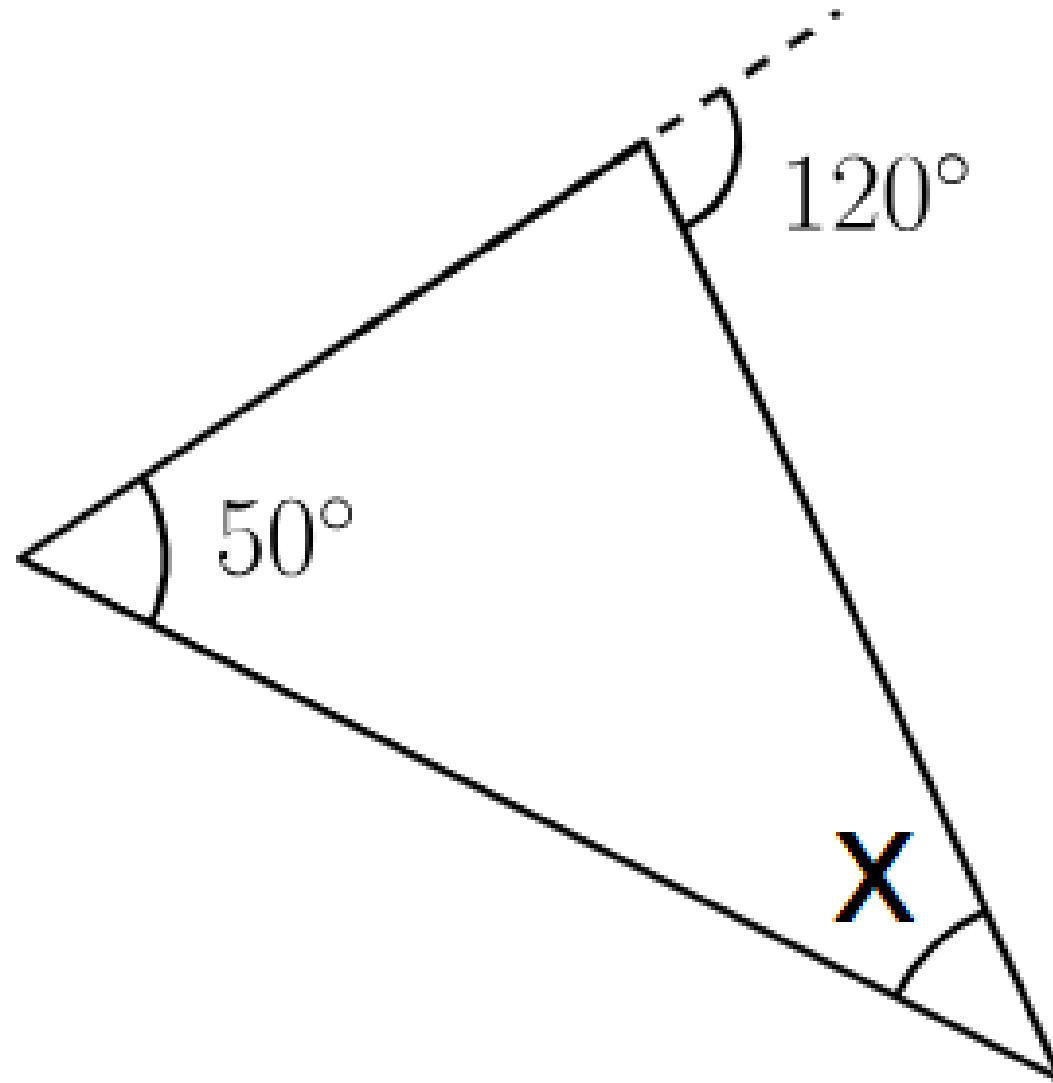
$$\Rightarrow \hat{E}x = \hat{A} + \hat{B}$$

Exemplos:

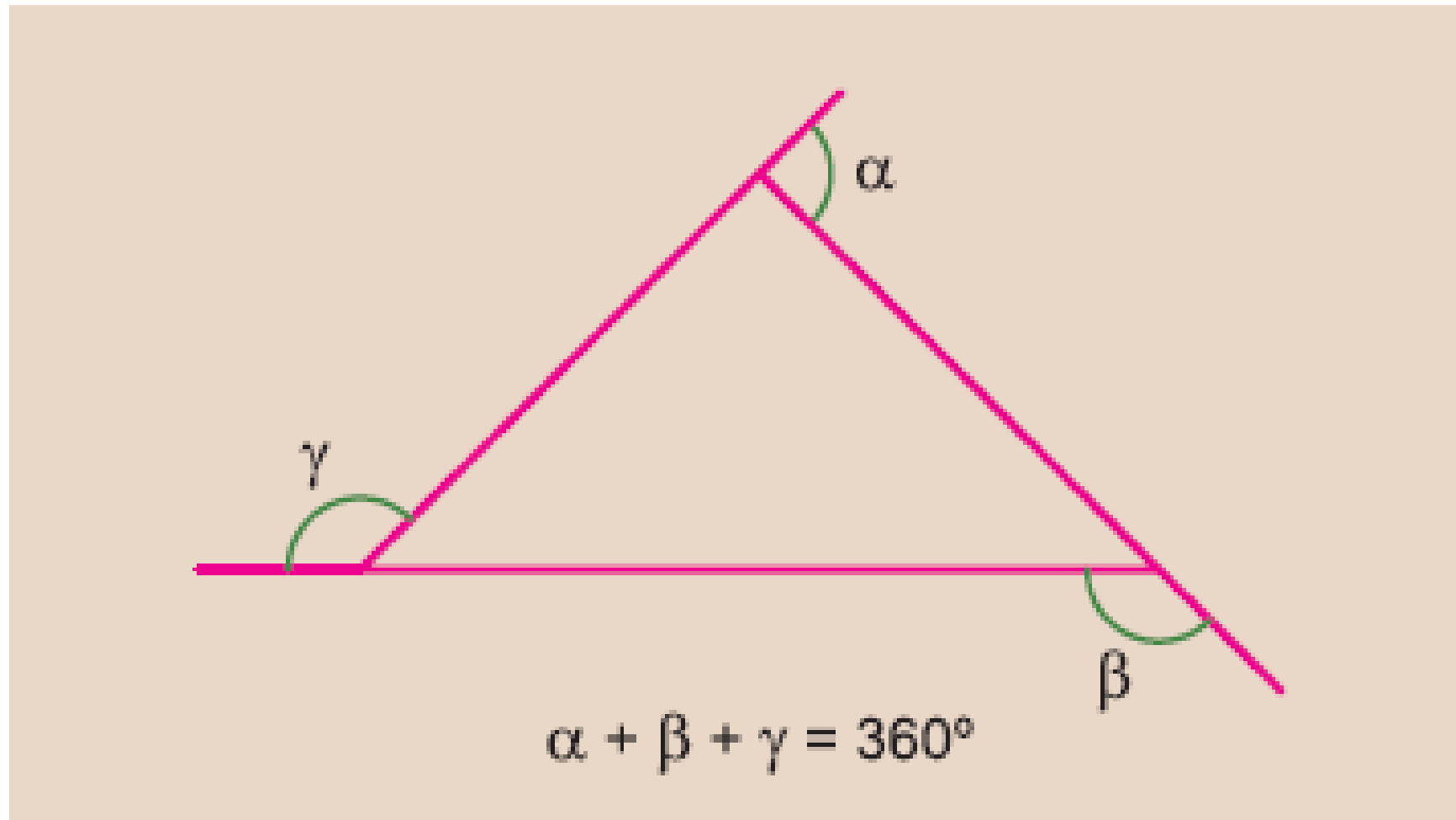
1) calcule o valor de x .



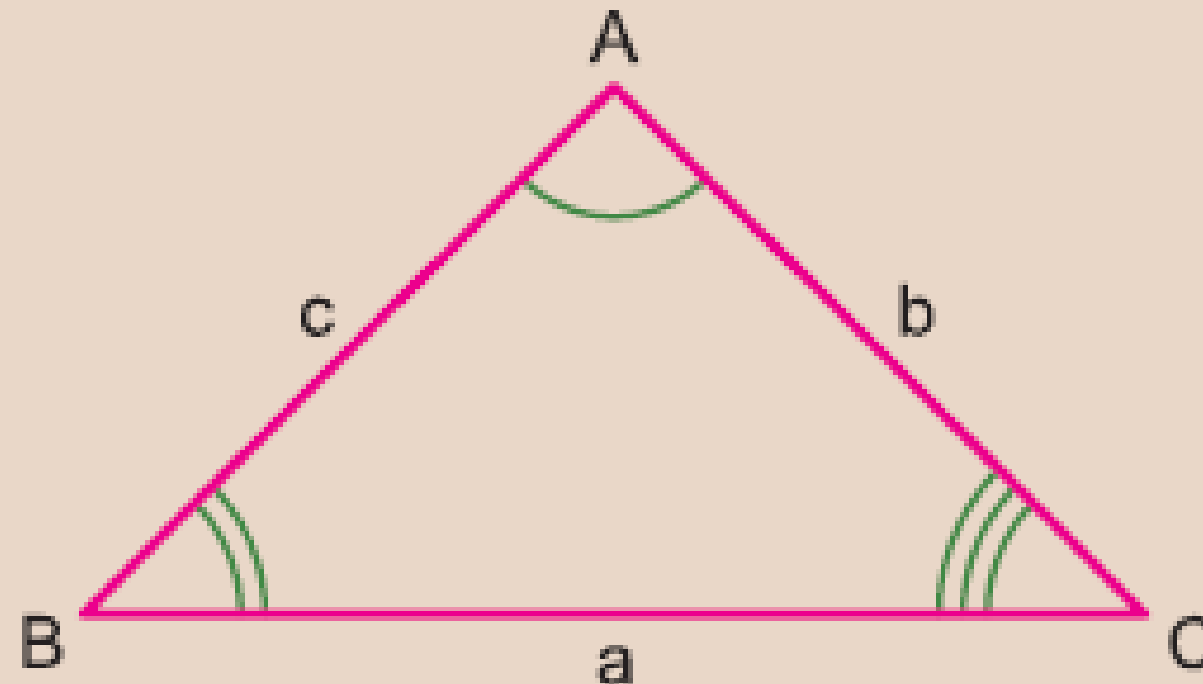
2) calcule o valor de x .



- **Soma dos ângulos externos:** em qualquer triângulo, a soma dos ângulos externos é 360° .



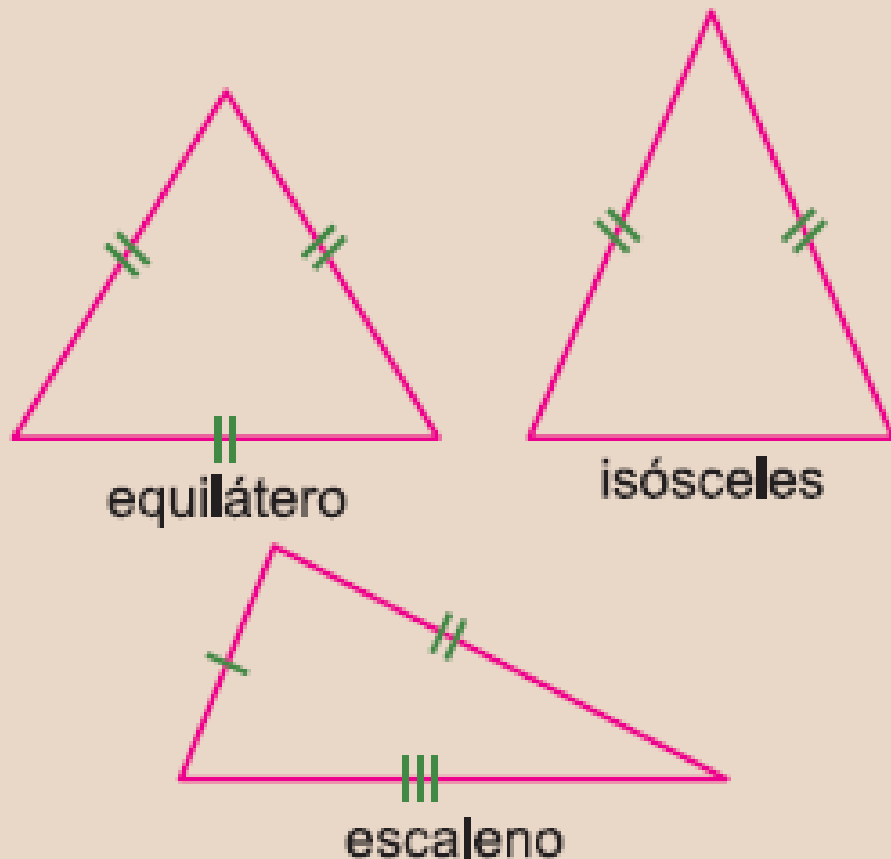
- **Desigualdade nos triângulos:** em todo triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa.



$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow \hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$$

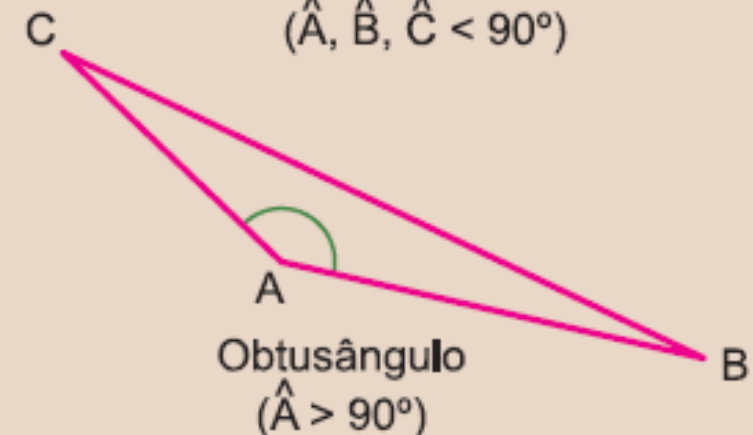
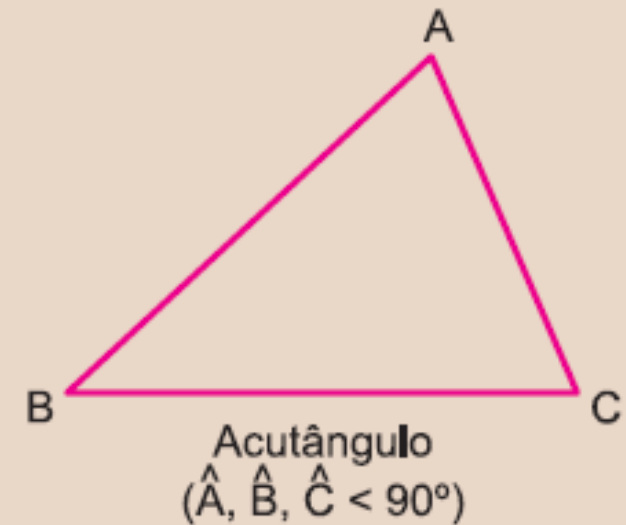
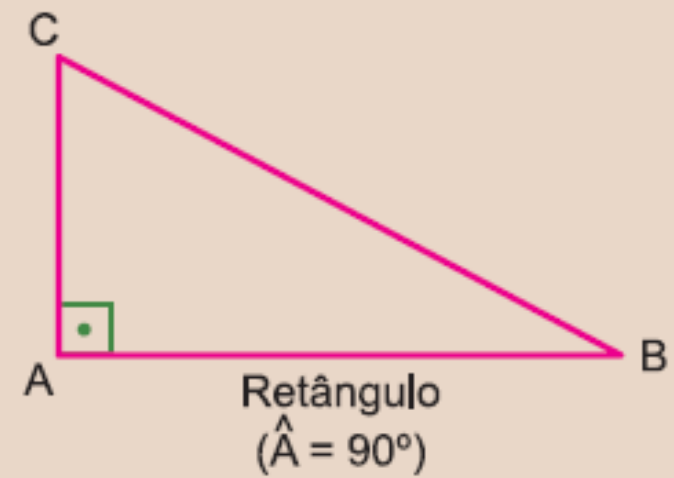
4. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

- quanto aos lados:



- **Equilátero:** os três lados são congruentes.
- **Isósceles:** dois lados são congruentes.
- **Escaleno:** os três lados são não congruentes.

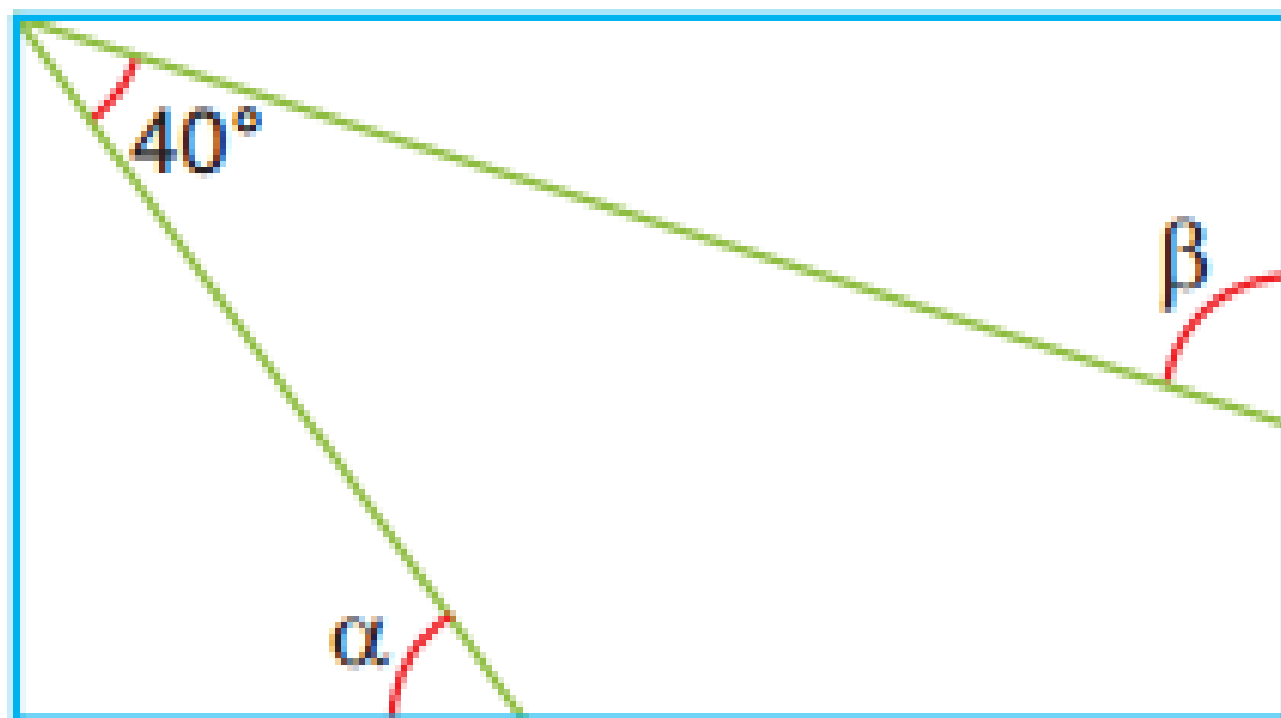
- quanto aos ângulos:
 - **Retângulo:** possui um ângulo reto.
 - **Acutângulo:** possui os três ângulos agudos.
 - **Obtusângulo:** possui um ângulo obtuso.



Exercícios



1. (FUVEST) – No retângulo abaixo, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:



a) 50°

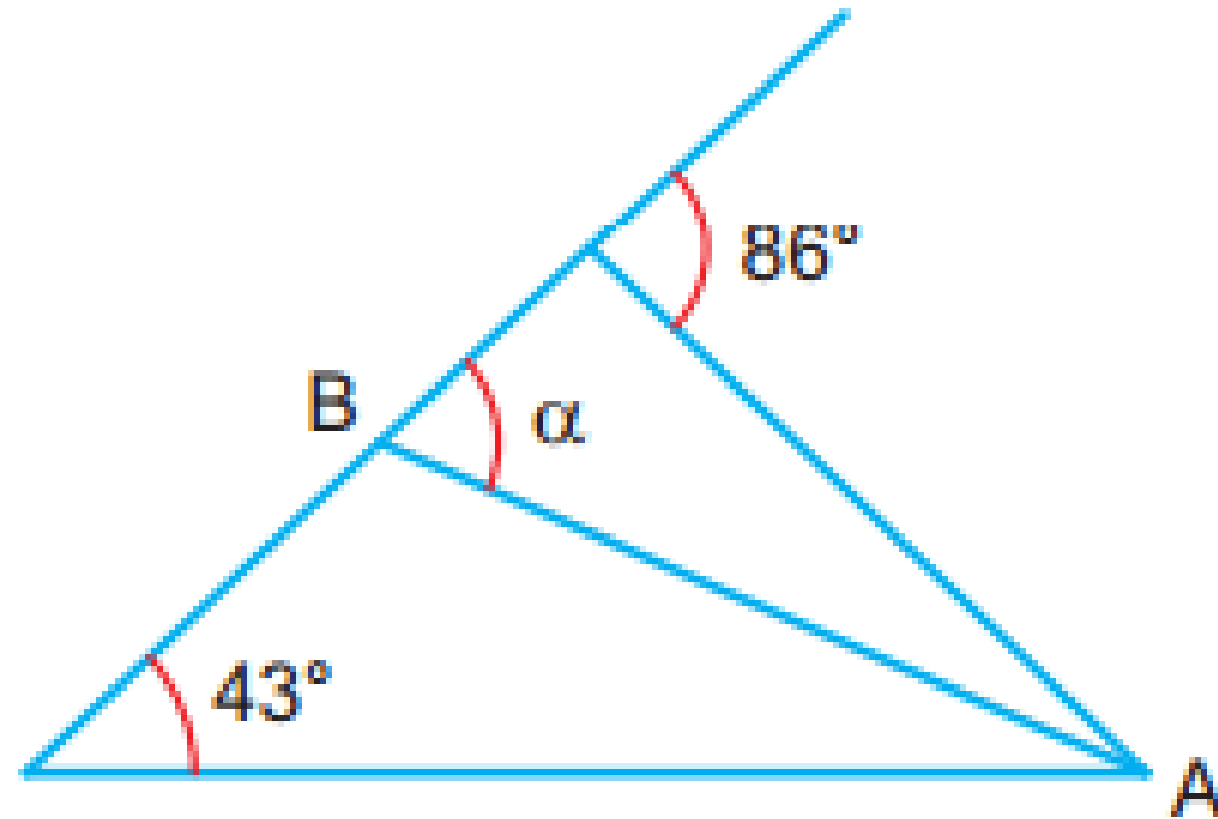
b) 90°

c) 120°

d) 130°

e) 220°

2. (MACKENZIE) – Na figura, $\overline{AB}$ é bissetriz do ângulo de vértice A. A medida de α é:



a) 63°

b) $63,5^\circ$

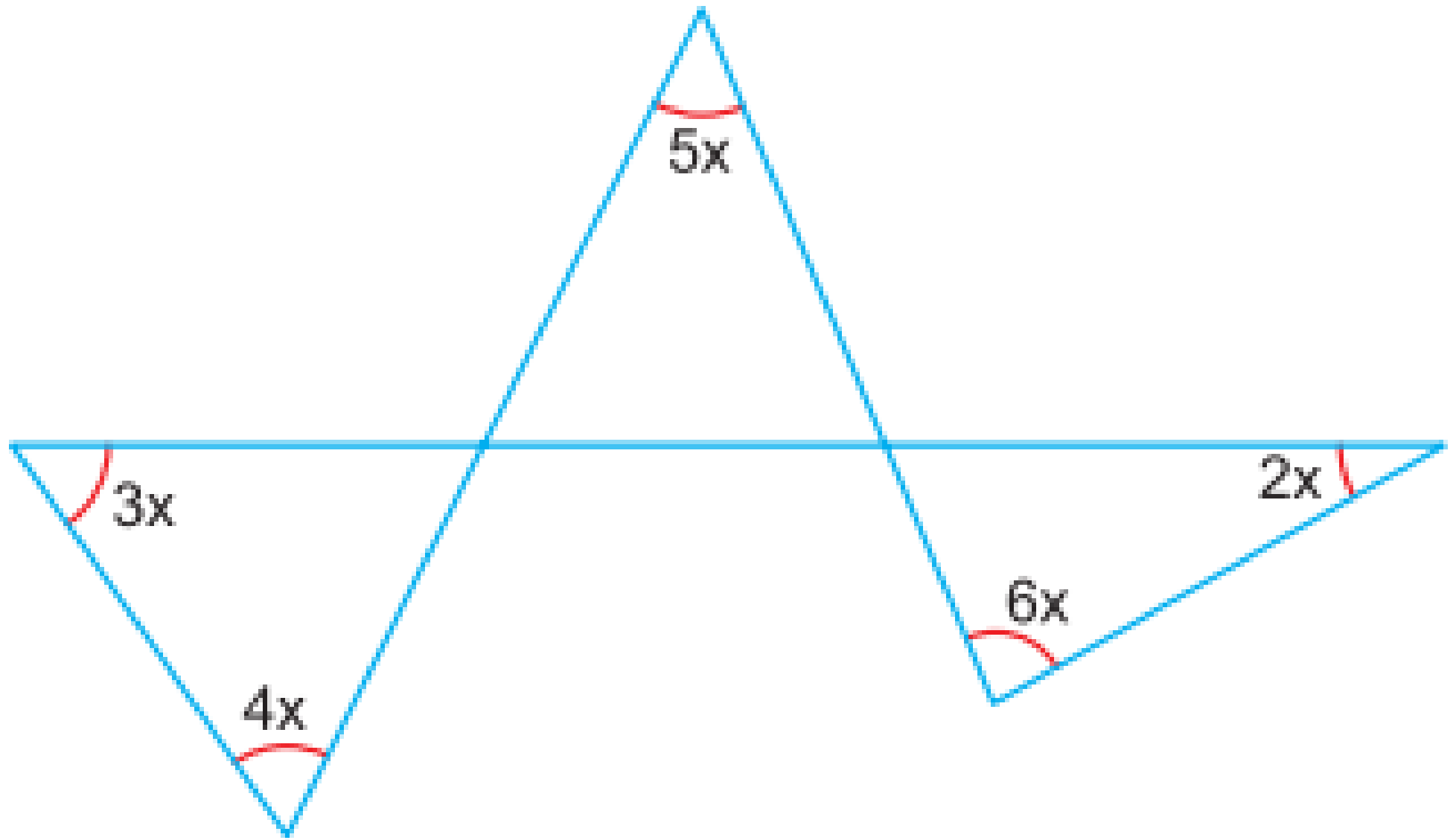
c) 64°

d) $64,5^\circ$

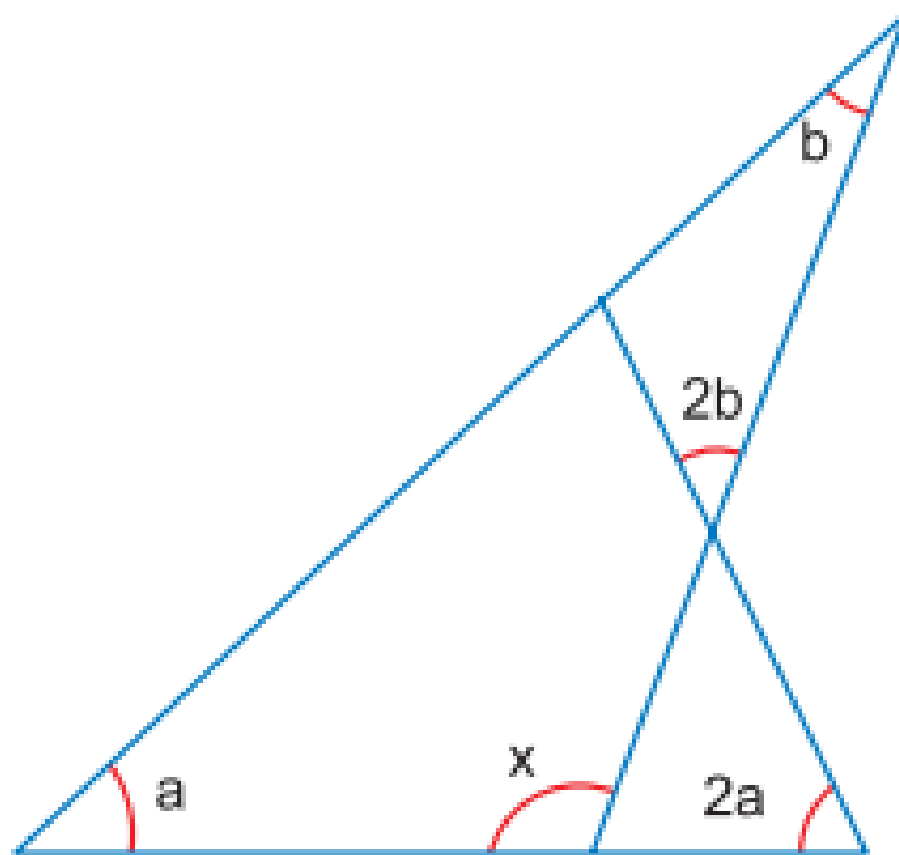
e) 65°

3. (OBM) – Na figura, quanto vale x ?

- a) 6°
- b) 12°
- c) 18°
- d) 20°
- e) 24°



4. (UFMG) – Observe a figura:

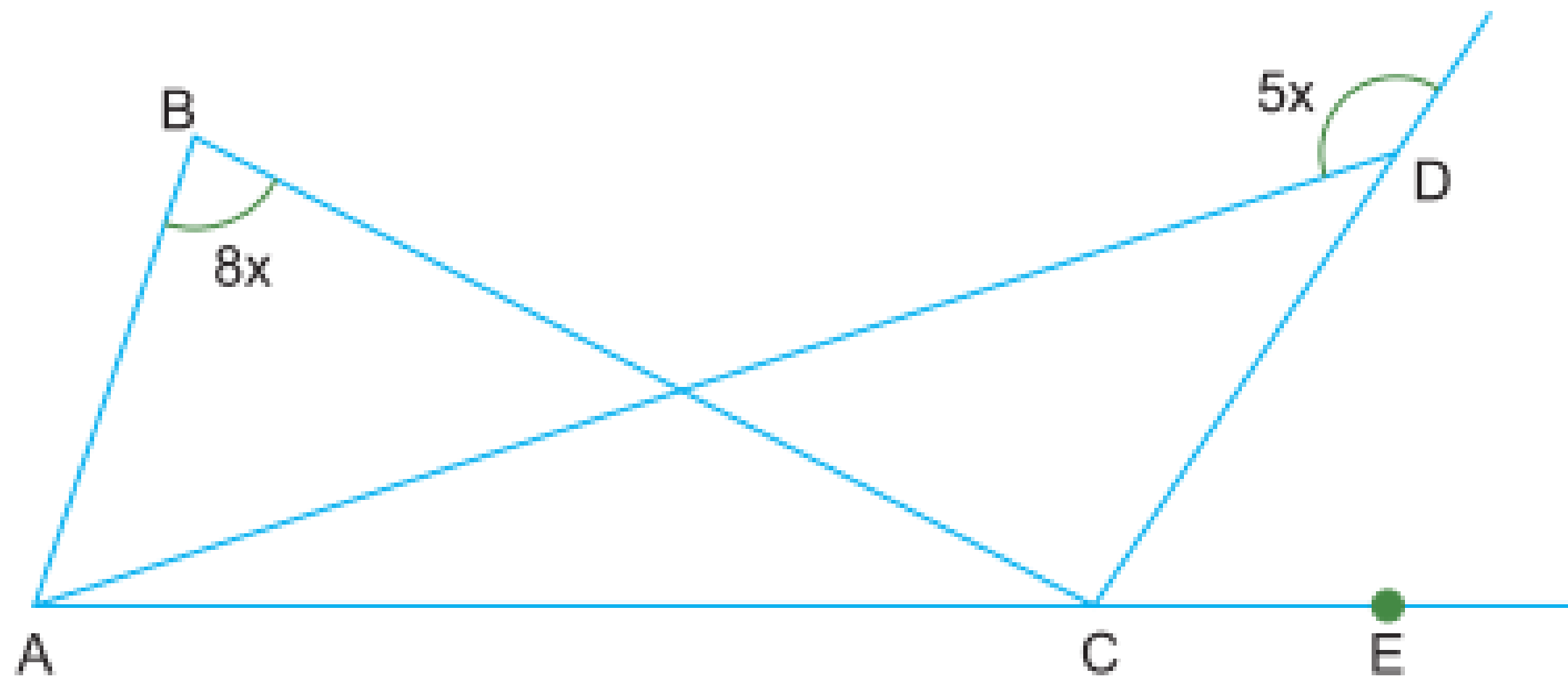


Nela a , $2a$, b , $2b$ e x representam as medidas, em graus, dos ângulos assinalados. O valor de x , em graus, é:

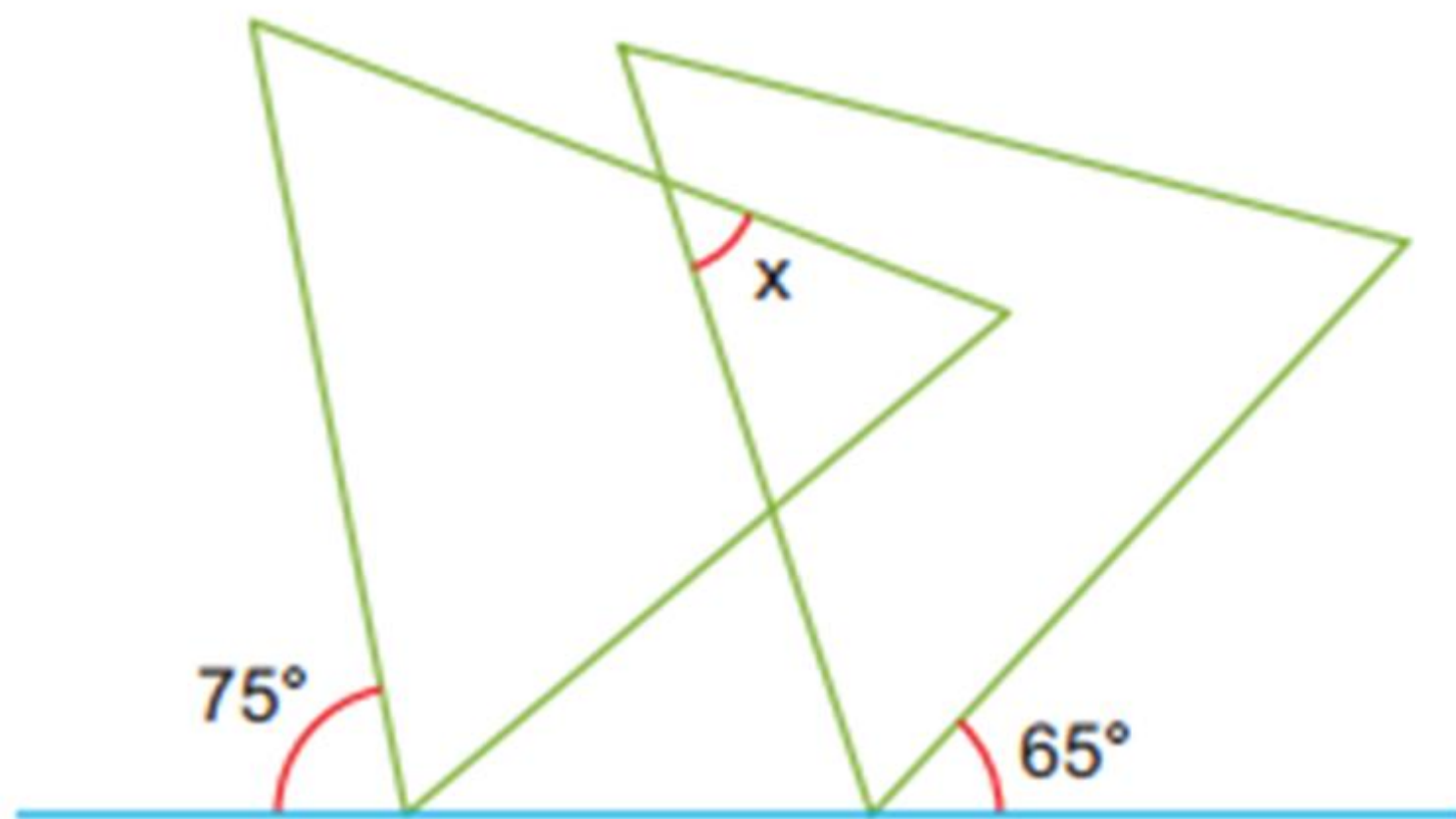
- a) 100° b) 105° c) 110° d) 115° e) 120°

5. Na figura seguinte, $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{BAC}$ e $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{BCE}$. O valor de x é:

- a) 10° b) 15° c) 20° d) 25° e) 30°



6. (OBM) – Na figura, os dois triângulos maiores são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x ?



a) 30°

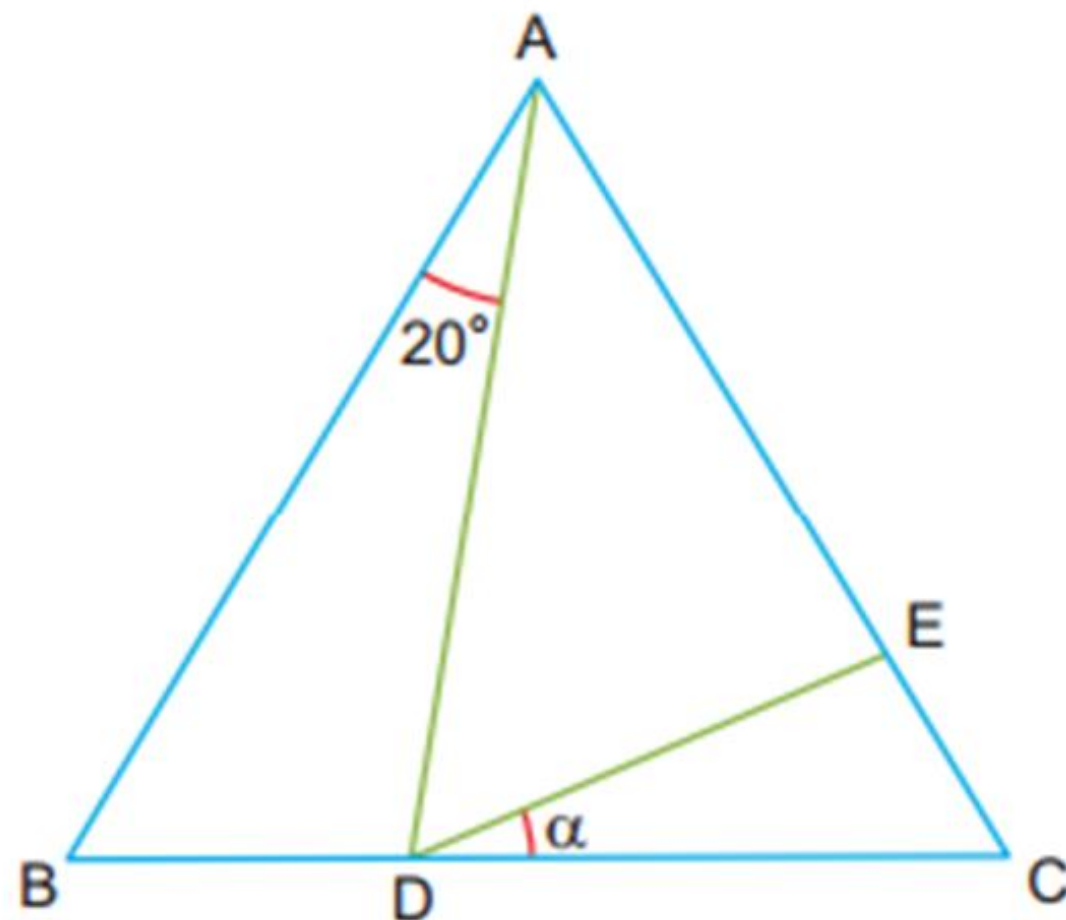
b) 40°

c) 50°

d) 60°

e) 70°

7. (MACKENZIE) – Na figura a seguir, têm-se $AB = AC$ e $AD = AE$. A medida do ângulo α é:



a) 5°

b) 10°

c) 15°

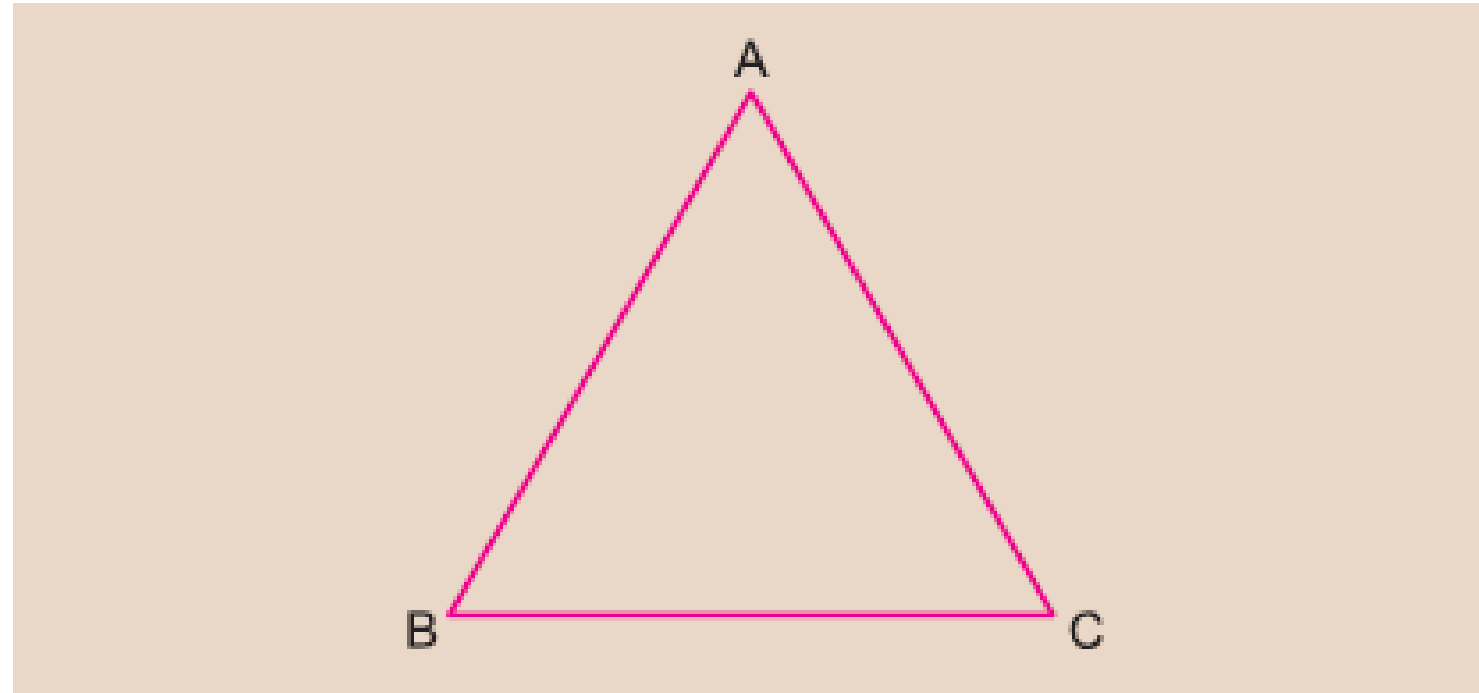
d) 20°

e) 25°

Triângulos

Condição de existência

Em todo triângulo, a medida de cada um dos lados é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois.



$$AB < AC + BC$$

$$BC < AB + AC$$

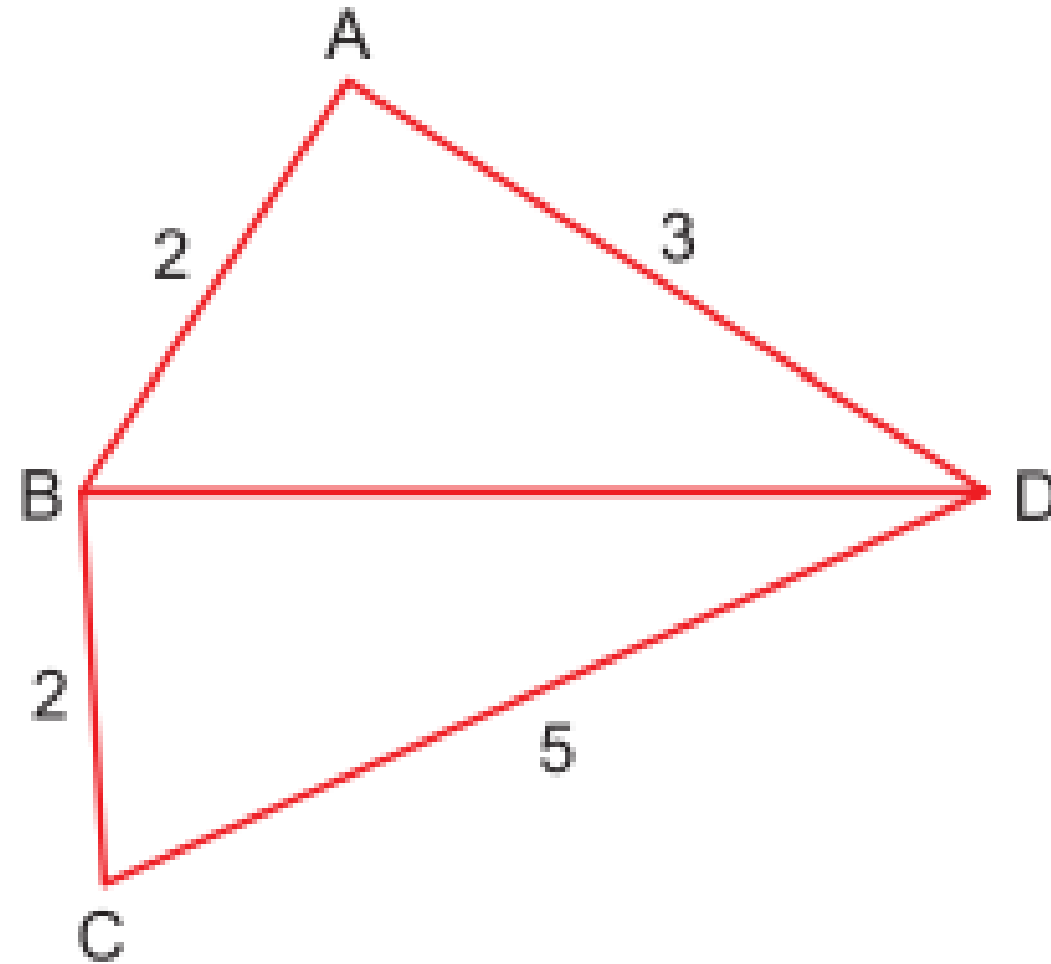
$$AC < AB + BC$$

Exemplos

1. (UFGO) – Se dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm, podemos afirmar que a medida do terceiro lado é

- a) igual a 5 cm. b) igual a 1 cm. c) igual a $\sqrt{7}$ cm.
d) menor que 7 cm. e) maior que 2 cm.

2. (MACKENZIE) – Se no quadrilátero ABCD da figura a medida de $\overline{BD}$ for um número natural, então esse número será:



a) 8

b) 7

c) 6

d) 5

e) 4

3. Se $x \in \mathbb{N}$ e $x - 2$, $2x + 1$ e 9 são as medidas dos lados de um triângulo, então o número de possíveis valores de x é:

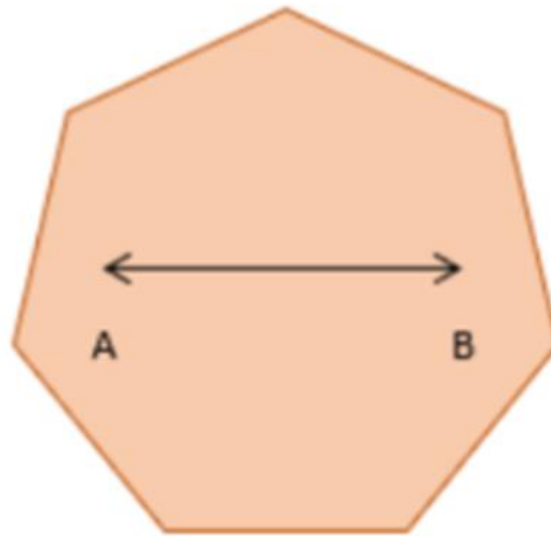
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6



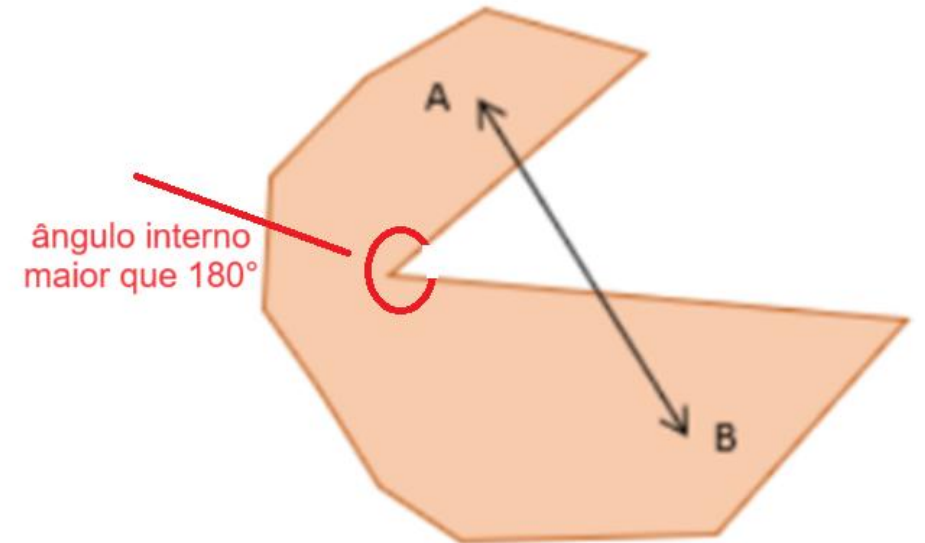
Polígonos



Tipos de Polígonos



Convexo



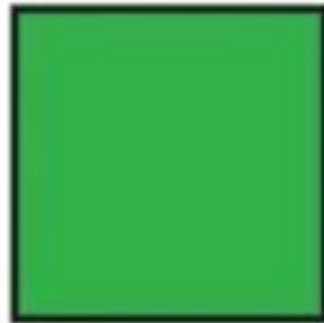
Não
Convexo

Se pelo menos um ângulo interno for maior que 180° o polígono não é convexo.

Dependendo do número de lados n , os polígonos recebem nomes específicos, como por exemplo:



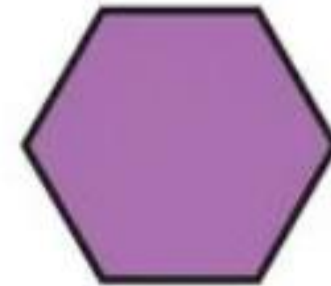
Triângulo



Quadrilátero



Pentágono



Hexágono



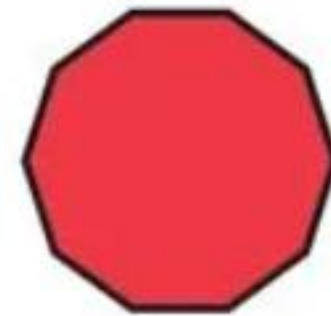
Heptágono



Octógono



Eneágono



Decágono

Os polígonos também podem ser chamados genericamente por polígonos de n lados. Por exemplo:



Icoságono ou polígono de 20 lados.

Classificação dos Polígonos

- **Polígono equilátero:** tem todos os lados congruentes.

Exemplos:

losango, quadrado,...

- **Polígono equiângulo:** tem todos os ângulos internos congruentes.

Exemplos:

retângulo, quadrado,...

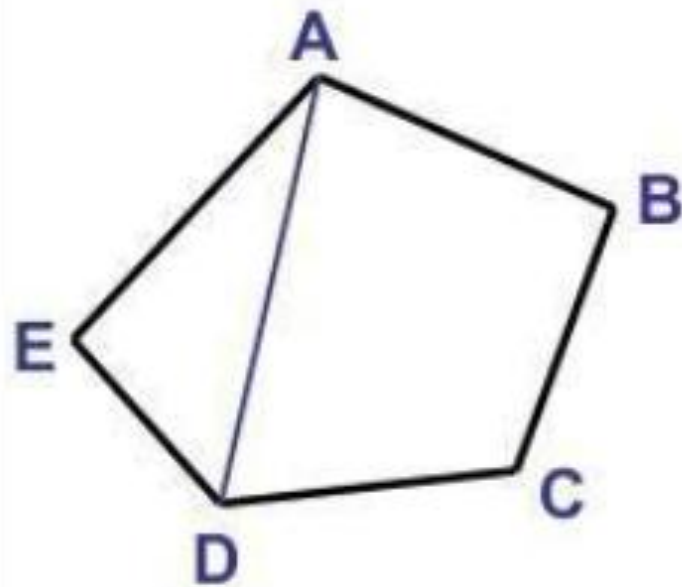
- **Polígono regular:** é equilátero e equiângulo simultaneamente.

Exemplo:

quadrado.

NÚMERO DE DIAGONAIS (d)

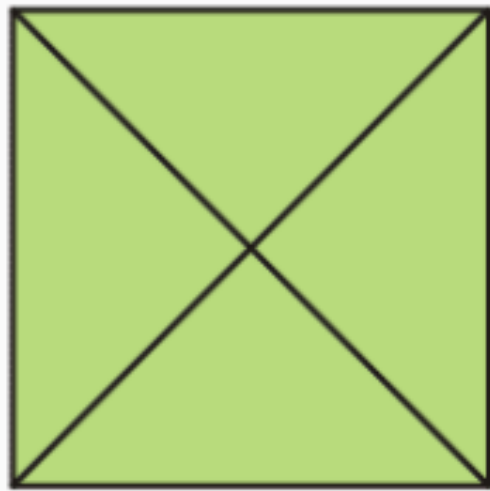
Diagonal de um polígono é todo segmento determinado por dois vértices não consecutivos.



$\overline{AD}$ é uma diagonal do pentágono ABCDE

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Exemplo: calcule o número de diagonais do quadrado, do pentágono e do hexágono.



$$N = 4$$

$$d = 2$$



$$N = 5$$

$$d = 5$$



$$N = 6$$

$$d = 9$$

*Soma dos ângulos internos
em função do número de lados*

Soma ângulos internos

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Número lados

Exemplo: calcule a soma dos ângulos internos dos polígonos:

- 1) Triângulo;
- 2) Quadrado;
- 3) Pentágono;
- 4) Hexágono.

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS(S_e)

É sempre igual a 360° para todos os polígonos convexos.

$$S_e = 360^\circ$$

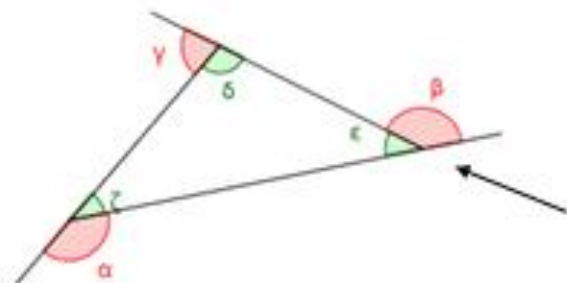
POLÍGONOS REGULARES

Em todo polígono **regular** de n lados ($n \geq 3$), sendo $\hat{a}_i$ a medida de cada ângulo interno e $\hat{a}_e$ a medida de cada ângulo externo, têm-se:

$$\hat{a}_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} \quad \begin{array}{l} \text{Soma dos internos} \\ \text{dividido por } n \end{array}$$

$$\hat{a}_e = \frac{360^\circ}{n} \quad \begin{array}{l} \text{Soma dos externos} \\ \text{dividido por } n \end{array}$$

$$\hat{a}_i + \hat{a}_e = 180^\circ$$



Exercícios



1. (AMAN) – O polígono convexo em que o triplo do número de vértices é igual ao total de diagonais é o

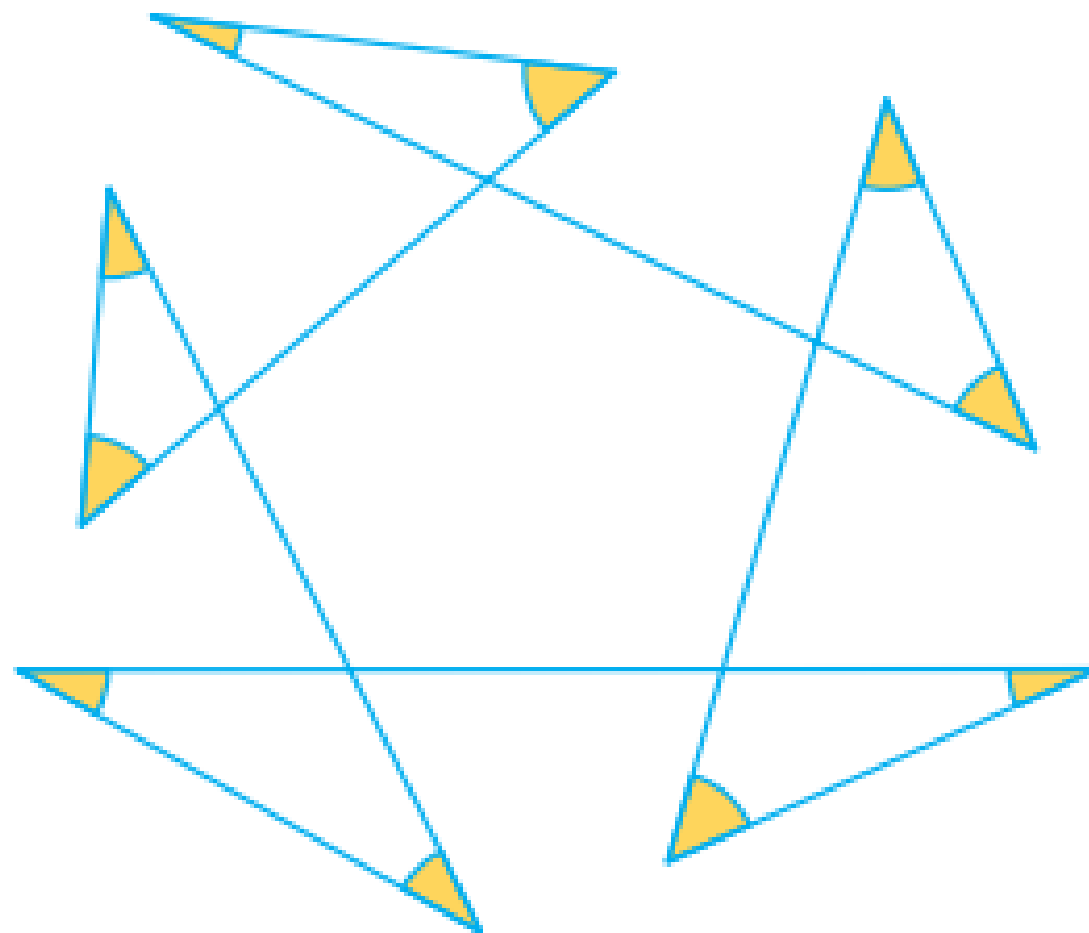
- | | | |
|---------------|----------------|--------------|
| a) eneágono. | b) dodecágono. | c) hexágono. |
| d) heptágono. | e) icoságono. | |

2. (CESGRANRIO-RJ) – Se um polígono convexo de n lados tem 54 diagonais, então n é:

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

3. **(UNIUBE)** – A soma dos ângulos internos de um polígono regular é igual a 36 ângulos retos. A medida em graus do ângulo externo é
- a) 6 b) 9 c) 18 d) 24 e) 36

4. (UFES) – A soma das medidas dos dez ângulos agudos assinalados na figura abaixo é igual a:



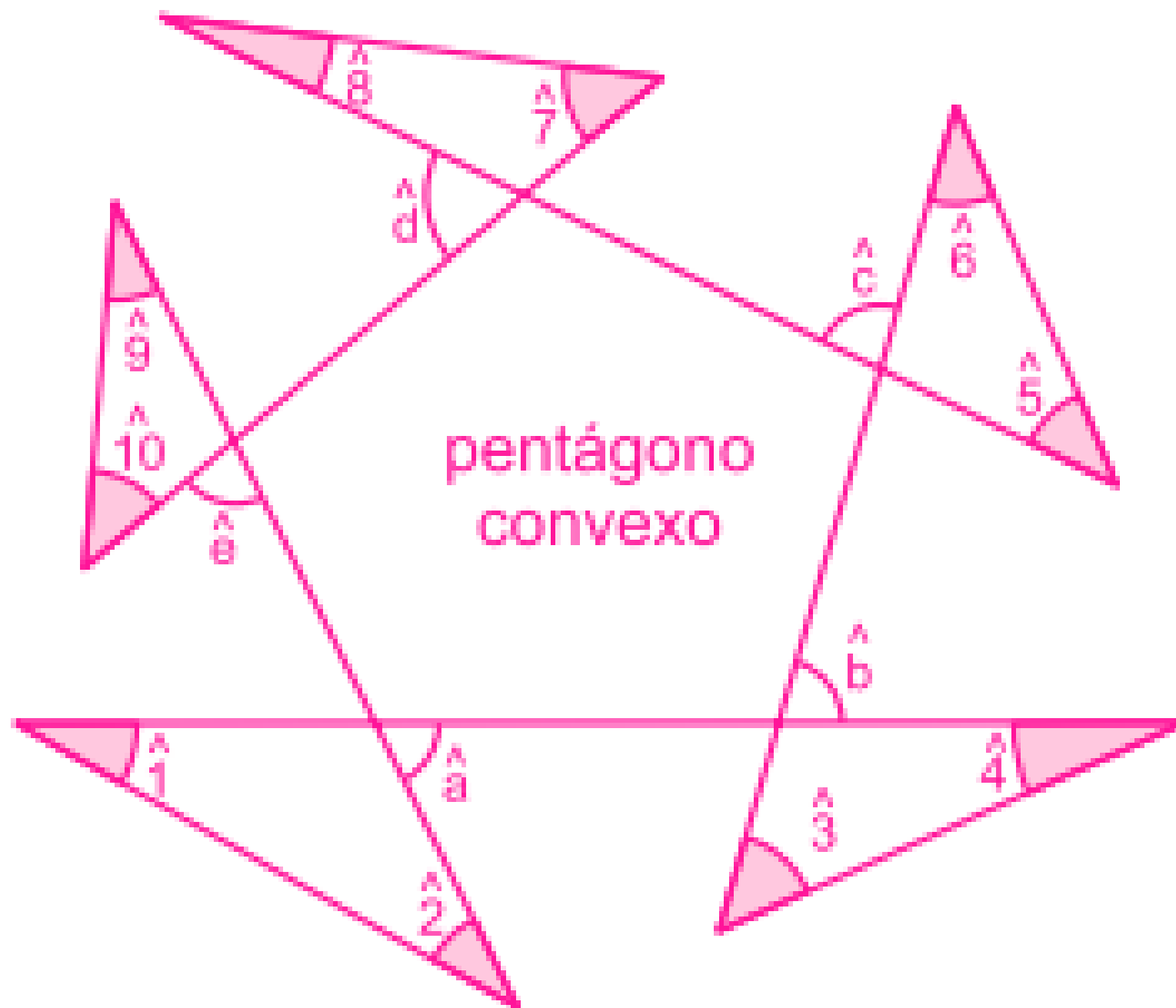
a) 180°

b) 360°

c) 540°

d) 720°

e) 1440°



5. A soma das medidas de cinco ângulos internos de um polígono regular é igual a 700° . A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é igual a:

a) 1080° b) 1260° c) 1440° d) 1620° e) 1800°

Como o polígono é regular, os ângulos possuem a mesma medida, logo, $700 : 5 = 140^\circ$.